

Esame di Controlli Automatici - 13 Settembre 2016

- Q1** Si discutano i vantaggi ed i limiti delle tecniche di progettazione di controllori stabilizzanti basate su retroazione dello stato stimato rispetto a quelle basate sulla sintesi in frequenza.
- A1** Il progetto dei regolatori con le tecniche dello spazio di stato sono sistematiche, e permettono di stabilizzare qualsiasi sistema con un regolatore con un numero di stati al più uguale a quello del sistema stesso. Sono però meno adatte delle tecniche in frequenza per ottenere un progetto flessibile che rispetti specifiche articolate.
- Q2** A quali problemi pratici può andare incontro il progettista di un sistema di controllo che non tenga conto della presenza di dinamiche non osservabili dalla uscita del sistema da controllare?
- A2** Se il sistema da controllare ha dinamica non osservabile instabile, la stabilizzazione ingresso/uscita non la altera, per cui gli stati del sottosistema non osservabile potranno divergere. Anche nel caso di dinamica non osservabile stabile, è comunque possibile che nel transitorio il sottosistema esca dalla regione in cui l'approssimazione lineare ha validità ed eventualmente raggiunga anche limiti fisici di funzionamento del sistema.
- Q3** Si diano le definizioni di movimento stabile e di movimento attrattivo e si discuta la differenza con quelle analoghe per le orbite.
- A3** Dato un sistema autonomo $Dx = f(x)$, con condizione iniziale $x(0) = x_0$. Un movimento $\bar{x}(t) = x(x_0, t)$ è stabile per il sistema se tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a x_0 rimangono arbitrariamente vicine a $x(x_0, t)$ stesso; vale a dire, se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $\|x' - x\| < \delta$, allora $\|x(x', t) - x(x_0, t)\| < \epsilon, \forall t$. Un movimento $\bar{x} = x(x_0, t)$ è attrattivo per il sistema (vale a dire che il sistema è convergente rispetto a quel movimento), se, per tempi sufficientemente lunghi, tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a x_0 tendono a $\bar{x}(t)$. Formalmente, se $\exists \delta > 0$ tale che $\|x' - x_0\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(x', t) - \bar{x}(x_0, t)\| = 0$. Sia T_{x_0} un'orbita o traiettoria del sistema passante per il punto x_0 . Vale a dire il luogo di punti percorso dallo stato a partire da x_0 , ovvero $T_{x_0} = \{\xi \in X | \exists t, \xi = x(x_0, t)\}$. La distanza di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ da un'orbita T_{x_0} sia definita come la quantità $d(x, T_{x_0}) = \min_{z \in T_{x_0}} \|x - z\|$. Un'orbita è stabile per il sistema se tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a T_{x_0} rimangono arbitrariamente vicine a T_{x_0} ; ovvero se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $d(x', T_{x_0}) < \delta$, allora $d(x(x', t), T_{x_0}) < \epsilon, \forall t$. L'orbita è attrattiva per il sistema se $\exists \epsilon > 0: d(x', T_{x_0}) < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} d(x(x', t), T_{x_0}) = 0$.
- Q4** Si descriva l'applicazione del teorema dell'Insieme Invariante Massimo alla stima della R.A.S. di un sistema. Tale stima è per eccesso o per difetto? Motivare, dando le opportune ipotesi. Si riporti il codice Matlab di una possibile implementazione numerica di questo metodo.
- A4** Si consideri un sistema $\dot{x} = f(x)$ con un equilibrio A.S. nell'origine (scelto opportunamente il sistema di coordinate). Sia $V(x)$ una funzione di Lyapunov, quindi p.d., tale per cui $L_f V(x)$ sia n.d. (è possibile estendere al caso di negativa semi-definita utilizzando Krasovski). Si consideri inoltre la curva di livello della funzione di Lyapunov $V(x) = l$, e la regione chiusa da essa delimitata $\Omega_l = \{x | V(x) \leq l\}$. Se in tale regione si ha ovunque (eccetto l'origine) $L_f V(x) < 0$, allora si può affermare che Ω_l è contenuta nella R.A.S. dell'origine. Cercando la più ampia curva di livello di $V(x) = \text{cost} > 0$ che soddisfi tali condizioni, ed eventualmente utilizzando più volte questa strategia con diverse funzioni di Lyapunov, è possibile ottenere una stima *per difetto*, e quindi cautelativa, della R.A.S., ipotizzando di riuscire a svolgere esattamente i calcoli sopra esposti. In generale, questo non è facile per la maggior parte dei sistemi, e si procede invece solitamente ad una stima numerica che si basa su questo metodo: devono essere fatte una serie di valutazioni *casuali* in numero *abbastanza elevato* di punti su ciascuna curva di livello di $V(x)$, a valori *discretizzati*, verificando che per *l'intera* curva di livello non ci siano punti per cui la derivata direzionale della funzione di Lyapunov sia non negativa. Se anche un solo punto sulla curva di livello non soddisfacesse tale requisito, la procedura dovrebbe arrestarsi e tutta la curva di livello essere scartata dalla stima della R.A.S., fermo restando che le curve a valori inferiori (che hanno interamente verificato i criteri) rimangono, e che sia possibile testare nuove funzioni di Lyapunov per raffinare la stima.

Q5 Siano G_1 e G_2 due sistemi stabili e a fase minima, completamente raggiungibili ed osservabili. Si considerino le connessioni serie, parallelo e retroazione (G_1 in catena diretta e G_2 in catena di retroazione) e si discuta se, ed in quali casi, possano variare le 4 proprietà elencate per il sistema complessivo.

A5 Consideriamo separatamente i vari casi.

Caso serie: è sufficiente considerare una delle due connessioni, descrivendo quali sono i possibili problemi, ad esempio G_2 all'input e G_1 a seguire. Il sistema complessivo è rappresentato dalla serie $G_1 G_2$. A meno di cancellazioni, che sarebbero comunque tutte nel semipiano a parte reale negativa, sia gli zeri che i poli della serie sono l'insieme di zeri e poli dei due sistemi e, quindi, non si può avere perdita di stabilità né tantomeno zeri a fase non minima. Invece, le possibili cancellazioni possono portare ad una perdita di:

- osservabilità, nel caso di una cancellazione fra un polo di G_2 ed uno zero di G_1
- raggiungibilità, nel caso di una cancellazione fra uno zero di G_2 ed un polo di G_1

Caso parallelo: il sistema complessivo è rappresentato da $G_1 + G_2$. È ovvio dedurre che i poli del sistema complessivo, essendo un sottoinsieme dei poli delle due funzioni, non possono che mantenere la proprietà di stabilità. Se ci sono invece dei modi a comune fra G_1 e G_2 , questi porteranno a cancellazioni che comportano contemporaneamente perdita sia di raggiungibilità che di osservabilità. Per quanto riguarda invece la proprietà di fase minima, il numeratore del sistema in parallelo contiene somme di termini misti, e le nuove radici possono anche essere cambiate di segno e portare quindi ad avere non minimo sfasamento.

Caso retroazione: il nuovo sistema sarà raggiungibile ed osservabile se e solo se G_1 non ha zeri coincidenti con poli di G_2 . Perderà entrambe tali proprietà altrimenti. Gli zeri del nuovo sistema, che si può scrivere sotto forma di f.d.t. (considerando $G_1 = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}$, $G_2 = \frac{n_2(s)}{d_2(s)}$)

$$G_{cl} = \frac{n_1(s) d_2(s)}{d_1(s) d_2(s) + n_1(s) n_2(s)}$$

saranno l'unione degli zeri di G_1 e dei poli di G_2 , per cui il sistema rimarrà a minimo sfasamento. Per quanto riguarda i poli, questi potranno cambiare, come noto dal controllo in retroazione di sistemi dinamici, ed anche cambiare di segno e quindi far perdere la proprietà di stabilità al sistema complessivo.

Q6 Per un sistema LTITC con matrice dinamica $A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$, si discuta la stabilità dei corrispondenti sistemi campionati con Eulero in avanti e con ZOH al variare del tempo di campionamento T .

A6 Applicando il metodo di discretizzazione di Eulero in avanti, si ha che il sistema campionato ha matrice dinamica $A_E = \mathcal{I} + AT$ con \mathcal{I} matrice identica di dimensione due. Questo sistema è A.S. se ha autovalori in norma minore di uno, ovvero (sviluppando i calcoli) per $T < 2\sigma/(\sigma^2 + \omega^2)$. La discretizzazione ZOH invece mantiene sempre le proprietà di stabilità del sistema T.C., essendo gli autovalori di e^{AT} pari a $e^{\lambda_i T}$, quindi in modulo minori di 1 se gli autovalori λ_i di A hanno parte reale negativa.

Q7 Si scriva un esempio di sistema, in forma di Kalman, che sia polinomialmente instabile, non completamente raggiungibile, non completamente osservabile, stabilizzabile e non detettabile.

A7 Un esempio di tale sistema è il seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

dove si nota che: il sistema è polinomialmente instabile, non completamente raggiungibile ma con parte non raggiungibile A.S. (e quindi stabilizzabile), non completamente osservabile e con parte non osservabile instabile (e quindi non detettabile).

Q8 Si consideri il sistema rappresentato dalla f.d.t.

$$G_1 = \frac{s - \alpha}{s(s - \beta)(s - \gamma)}$$

e se ne scrivano tre realizzazioni, di cui una minima, una non osservabile ma detettabile, ed una non raggiungibile e non stabilizzabile.

A8 Facendo i calcoli del denominatore si ottiene:

$$G_1 = \frac{s - \alpha}{s^3 - (\gamma + \beta)s^2 + \gamma\beta s}$$

Per la realizzazione minima si può ad esempio considerare una forma canonica di controllo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\gamma\beta & \gamma + \beta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [-\alpha \quad 1 \quad 0]$$

Si può poi estendere tale realizzazione minima per considerare, alternativamente, un sottosistema non osservabile con autovalori associati a parte reale negativa (e quindi detettabile), ed un sottosistema non raggiungibile e con autovalori associati di cui almeno uno a parte reale positiva (e quindi non stabilizzabile). I due casi sono riportati di seguito:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma\beta & \gamma + \beta & 0 \\ * & * & * & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$$

$$C = [-\alpha \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & -\gamma\beta & \gamma + \beta & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [-\alpha \quad 1 \quad 0 \quad *]$$

Q9 Dato il sistema $G = \frac{(s - a)}{s^3 - s + 1}$ ed una sua realizzazione minima, si trovi una retroazione degli stati che alloca gli autovalori del sistema in anello chiuso in $-10, -20, -30$. Si trovi il valore degli eventuali zeri del sistema in anello chiuso e si discuta questo risultato al variare del parametro a ;

A9 Si sceglie nuovamente, per comodità, una realizzazione minima in forma canonica di controllo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [-a \quad 1 \quad 0]$$

Il polinomio caratteristico da realizzare avrà la forma

$$(s + 10)(s + 20)(s + 30) = s^3 + 60s^2 + 1100s + 6000$$

e può quindi essere realizzato con una retroazione statica degli stati con matrice

$$K = [-6000 - (-1) \quad -1100 - 1 \quad -60]$$

tale per cui la matrice $A + BK$ avrà gli autovalori desiderati.

Si noti che gli zeri del sistema non vengono alterati da tale retroazione statica degli stati, per cui il sistema complessivo avrà ancora uno zero in $s = a$, a meno che questo non sia coincidente con uno dei poli imposti, portando in tal caso ad una cancellazione ed alla diminuzione di ordine del sistema.

Q10 Si consideri il sistema descritto dalla seguente f.d.t.

$$G(s) = \frac{s + 10}{s - 5}$$

Si progetti un regolatore che, utilizzando solo la retroazione delle uscite, stabilizzi il sistema e renda nullo l'errore di inseguimento per riferimenti a gradino.

A10 Per garantire che l'errore sia nullo a transitorio esaurito, per riferimenti a gradino, è necessario introdurre un polo nell'origine nel regolatore, non essendo questo presente nel sistema.

Si considera a tal fine il sistema esteso costituito dalla serie dell'integratore e di $G(s)$, $G_e(s) = \frac{s + 10}{s^2 - 5s}$, ed una sua realizzazione ad esempio in forma canonica di controllo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = [10 \quad 1]$$

Il calcolo della matrice K di retroazione degli stati, stavolta per un sistema di ordine 2, può essere fatto come al punto precedente, scegliendo i valori dei 2 autovalori desiderati per il sistema in anello chiuso in modo che questo sia stabile (tutti a parte reale negativa) e rispetti le performance richieste (in questo caso, non vi sono particolari richieste in merito).

Detti p i 2 autovalori che si desidera allocare per la matrice $A + BK$, si può procedere alla scelta dei poli dell'osservatore identità q facendo sì che questi siano fra 2 e 10 volte più veloci di quelli del controllore (2 è il limite teorico imposto dalla teoria dei segnali, ma di solito si sceglie un valore lievemente superiore per tenere conto di non idealità).

Tali poli saranno ottenuti attraverso una matrice di iniezione delle uscite L tale per cui la matrice $A + LC$ abbia gli autovalori desiderati. Si può quindi procedere in due modi: calcolare il polinomio caratteristico in funzione degli elementi della matrice L ed imporre l'uguaglianza dei coefficienti con il polinomio caratteristico desiderato (procedura utile di norma solo per sistemi piccoli, come ad esempio questo), oppure in maniera sistematica effettuando un opportuno cambio di base del sistema, utilizzando la forma canonica di osservabilità, avendo poi cura di effettuare la trasformazione opposta.

In quest'ultimo caso, si considera la forma canonica di osservabilità avere le matrici

$$A_o = T_{co}^{-1} A T_{co}, \quad C_o = C T_{co}$$

con T_{co} opportuna matrice di cambio di base calcolabile a partire dalle matrici di osservabilità in forma canonica di controllo \mathcal{O}_c ed in forma canonica di osservazione \mathcal{O}_o come

$$\mathcal{O}_o = \mathcal{O}_c T_{co} \quad \Rightarrow \quad T_{co} = \mathcal{O}_c^{-1} \mathcal{O}_o$$

La matrice L_o calcolata tramite la rappresentazione in forma canonica di osservazione per gli autovalori desiderati per la matrice $A_o + L_o C_o$ dovrà poi essere riportata nella base già usata per il progetto di K utilizzando il cambio di base $L = T_{co} L_o$.