**Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 3–10–2001**

<table>
<tr><td>Nome e Cognome:</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td>Anno di frequenza:</td><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Numero di matricola</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>–</td><td>–</td><td>$= \alpha - 1$</td><td>$= \beta - 1$</td><td>$= \gamma - 1$</td><td>$= \delta - 1$</td></tr>
</table>

**A (pt. 3)** Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols relativi al sistema:

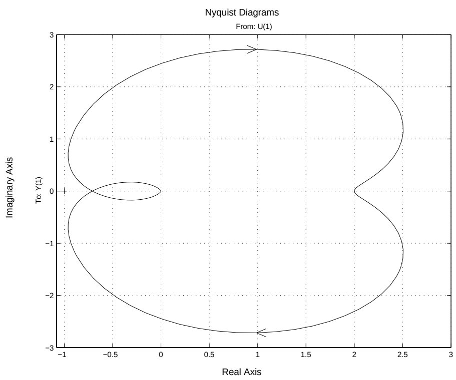
$$G(s) = \frac{10\alpha}{(0.005s+1)^2(\beta s^2 + s + 1)}$$

indicando i valori nei punti salienti del primo.

**B (pt. 8)** Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo;
- errore a regime alla rampa $\leq 1$ %;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 150 e 300 rad/sec.

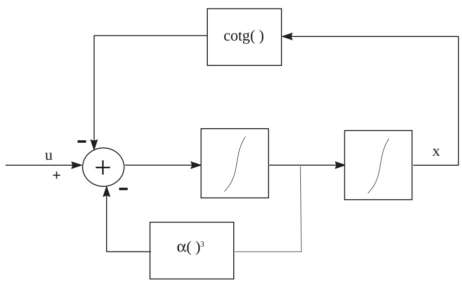
**C (pt. 4)** La f.d.t. $G(s) = \frac{20(s+1)}{(s^2+s+1)(s+2)(s+5)}$ ha il diagramma di Nyquist riportato nella figura sottostante. Analizzare se e con quali margini il sistema è stabile in anello chiuso.




**D (pt. 4)** Tracciare qualitativamente il luogo delle radici per il sistema $G(s) = \frac{K(s+20)}{(s+\gamma)^2(s^2+2s+10\delta)}$ nel caso di retroazione unitaria sia negativa che positiva e per guadagni $K$ variabili fra 0 e $+\infty$.

**E (pt. 3)** Indicare sul primo luogo delle radici ottenuto la zona del piano corrispondente ad una specifica di tempo di assestamento $T_a < \gamma$ e di sovraelongazione $S < 3\delta\%$.

Con riferimento al sistema il cui schema é riportato in figura seguente:



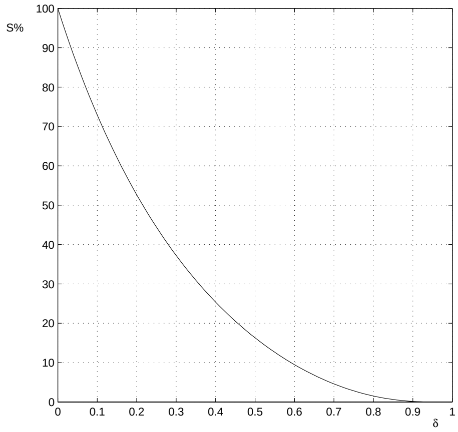

**F (pt. 2)** Trovare l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione temporale della variabile $x$.

**G (pt. 2)** Scrivere una realizzazione del sistema nello spazio degli stati.

**H (pt. 3)** Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo, scrivere le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ del modello linearizzato attorno ad essi e studiare la stabilità dell'equilibrio in tali punti.

**I (pt. 3)** Trovare un ingresso $u$ che renda l'origine unico punto di equlibrio globalmente asintoticamente stabile.

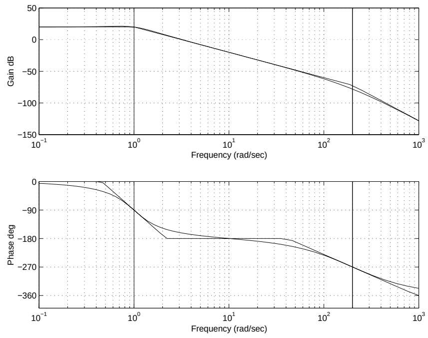
Per la soluzione dell'esercizio **E** puó essere utile la figura seguente:

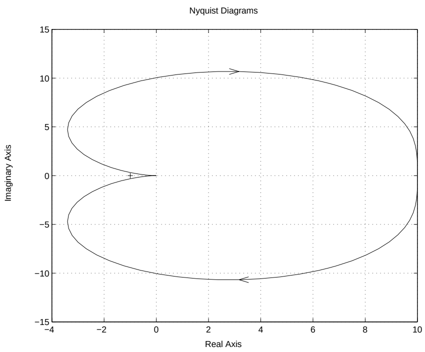


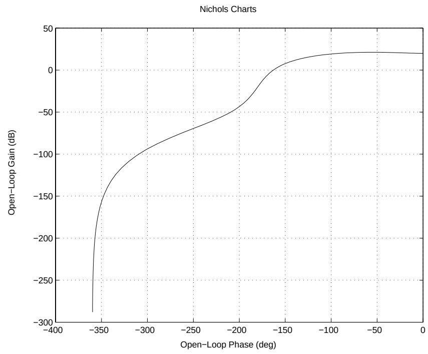
## Soluzione

**A)** Il sistema è già descritto in forma di Bode. La costante di guadagno statico è $10\alpha$ ossia $20{+}20\ \mathsf{Log}\,\alpha$ dB. Procedendo per pulsazioni crescenti, si trovano i contributi di una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ e coefficiente di smorzamento $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}$ e di un polo reale doppio in $-200$. Il sistema è a fase minima, per cui il diagramma delle fasi potrebbe essere interamente dedotto a partire dalla conoscenza del diagramma delle ampiezze mediante la Formula di Bode. La pulsazione di taglio è sicuramente compresa fra le due coppie di poli, in quanto il valore massimo del guadagno statico è di 40 dB e le due coppie sono separate da più di due decadi. Il valore della pulsazione di taglio si ottiene risolvendo $20\ \mathsf{Log}\,10\alpha = 40(\ \mathsf{Log}\,\omega_T -\ \mathsf{Log}\,\frac{1}{\sqrt{\beta}})$, cioè $\omega_T = \sqrt{\frac{10\alpha}{\beta}}$.

I diagrammi di Nyquist e Nichols sono ottenuti da quello di Bode senza alcuna difficoltà. Le figure seguenti riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\alpha = \beta = 1$.

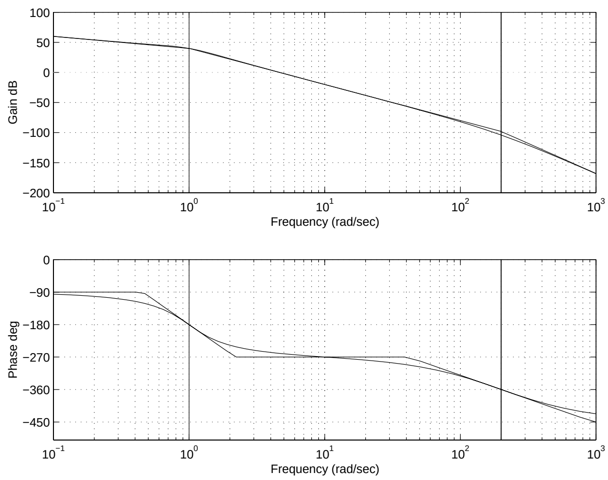



**B)** Poiché il sistema é a fase minima, si può procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode. Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$. Per soddisfare le specifiche statiche è necessario un polo nell'origine, quindi poniamo $t = 1$. La costante $K$ viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sul gradino: tale errore è pari a $\frac{1}{K10\alpha}$, quindi occorre che sia $K \geq \frac{10}{\alpha}$.

Se scegliamo $K = \frac{10}{\alpha}$, il sistema (dopo la compensazione statica) ha un diagramma di Bode rappresentato nella figura seguente.




La pulsazione di taglio continua ad essere compresa fra le due coppie di poli. Infatti alla pulsazione $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ la $G(j\omega)$ assume il valore $40{+}20\ \mathsf{Log}\,\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ dB, dunque la pulsazione di taglio $\omega_T'$ si desume dalla relazione $40{+}20\ \mathsf{Log}\,\frac{1}{\sqrt{\beta}} = 60\left(\ \mathsf{Log}\,\omega_T' -\ \mathsf{Log}\ \mathsf{Log}\,\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$ da cui $\omega_T' = \left(\frac{100}{\beta^2}\right)^{1/3}$, ossia $1 \leq \omega_T' \leq 4.641$. Dunque le specifiche riguardanti i margini di stabilitá e la pulsazione di taglio non sono soddisfatte.

Una possibile soluzione consiste nel porre una coppia di zeri complessi coniugati a cancellare la coppia di poli complessi coniugati. In tale modo la pulsazione di taglio sarebbe pari a 100. Inoltre la vicinanzia della coppia di poli reali in $-200$ fa in modo che ancora il requisito sul margine di fase non sia soddisfatto. Volendo collocare la pulsazione di taglio in $\omega_T'' = 200$ rad/sec, basta aumentare leggermente la costante di guadagno in modo che la pulsazione di taglio passi da 100 a 200 rad/sec (basta porre $K = \frac{20}{\alpha}$) e poi porre uno zero in $-200$ in modo da cancellare uno dei due poli reali. In tal modo si avrá il "ginocchio," ossia il passaggio da pendenza $-1$ a pendenza $-2$, in corrispondenza della pulsazione di taglio stessa. Infine, per rendere causale il controllore, occorre inserire 2 poli ad alta frequenza, ad esempio in $-10000$ rad/sec. Il controllore avrá dunque funzione di trasferimento pari a

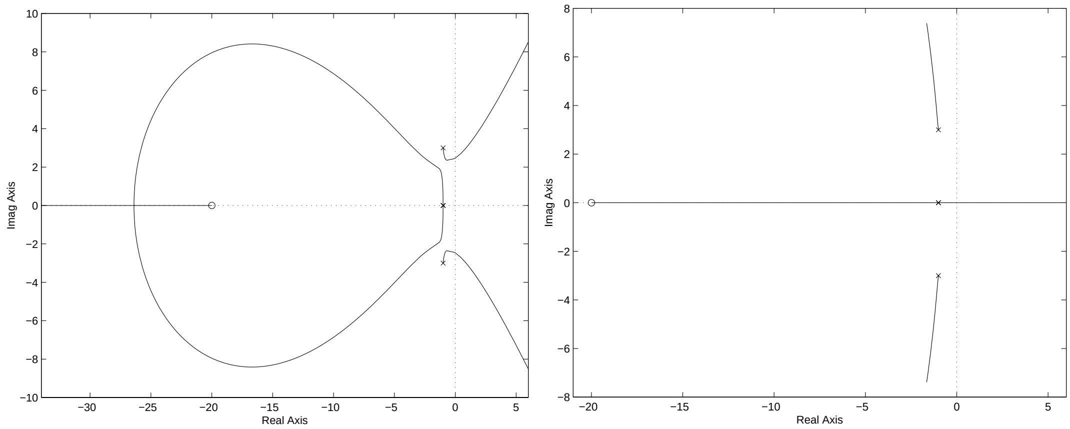
$$C(s) = \frac{20}{\alpha}\frac{(0.005s+1)(\beta s^2+s+1)}{s(0.0001s+1)^2}$$

La funzione di trasferimento del sistema compensato é pari a:

$$G(s)C(s) = \frac{200}{s(0.005s+1)(0.0001s+1)^2}$$

**C)** Per il criterio di Nyquist, poichè il sistema in anello aperto è asintoticamente stabile ed il luogo non circonda il punto $-1$, il sistema è stabile anche in anello chiuso. Poiché il luogo interseca l'asse reale negativo all'incirca nel valore $-0.7$, il margine di ampiezza è pari a $\frac{1}{0.7} = 1.43$ ossia circa 3 dB. Inoltre il luogo interseca il cerchio di raggio unitario a circa $-160°$, quindi il margine di fase è pari a circa $20°$.

**D)** Il sistema presenta uno zero in $-20$ e 4 poli, due in $-\gamma$ e due complessi coniugati in $-1 \pm i\sqrt{10\delta - 1}$. Non potendovi essere in alcun caso cancellazione poli–zeri, l'eccesso poli–zeri risulta sempre pari a 3, per cui il luogo presenta 3 asintoti. Nel caso di retroazione negativa tali asintoti sono inclinati rispetto al semiasse reale positivo di angoli pari a $\frac{\pi}{3}$, $\pi$ e $-\frac{\pi}{3}$ radianti rispettivamente; nel caso di retroazione positiva sono inclinati di angoli pari a 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $-\frac{2\pi}{3}$. Gli asintoti si intersecano nel punto dell'asse reale di ascissa pari a $(-2\gamma - 2 + 20)/3 = 6 - \frac{2\gamma}{3}$. Nelle figure seguenti sono riportati i luoghi richiesti nel caso $\gamma = \delta = 1$.




**E)** Per rispettare la specifica sul tempo di assestamento, occorre che i poli giacciano a sinistra della retta $x = -\frac{3}{\gamma}$. Inoltre se deve essere $S < 3\delta$, dall'ispezione visiva della curva che esprime la relazione fra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione si ottiene un valore limite $\zeta_{min}$ del coefficiente di smorzamento dei poli. Sia $\theta = \arccos \zeta_{min}$, la specifica sulla massima sovrelongazione percentuale si ottiene imponendo che tutti i poli giacciano nella porzione del semipiano a parte reale negativa compreso fra due semirette che partono dall'origine e sono inclinate rispetto al semiasse reale negativo di angoli pari a $\pm\theta$.

**F)** Essendo $\ddot{x}$ la variabile a monte dei due integratori, costruendo l'equazione al sommatore iniziale si ottiene $\ddot{x} = -\alpha\dot{x}^3 - \text{cotg}\ x + u$; quindi l'equazione differenziale richiesta é la seguente:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x}^3 + \text{cotg}\ x = u$$

**G)** Ponendo $z_1 = x$ e $z_2 = \dot{x}$ si ottiene la rappresentazione nello spazio degli stati

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= z_2 \\ \dot{z_2} &= -\text{cotg}\ z_1 - \alpha z_2^3 + u \end{aligned}$$

**H)** I punti di equilibrio sono rappresentati da tutte le coppie $z_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2\beta}$, $z_2 = 0$ con $k$ intero. Per studiare la stabilitá degli equilibri si puó utilizzare il metodo indiretto di Lyapunov. Le matrici del modello linearizzato sono:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

In tutti punti di equilibrio la matrice $\mathbf{A}$ ha autovalori 1 e $-1$, quindi in tali punti l'equilibrio é instabile.

**I)** L'origine non é fra i punti di equilibrio del sistema; l'ingresso richiesto puó essere scomposto nella somma di sue termini $u = u_1 + u_2$, il primo dei quali serve a rendere l'origine punto di equilibrio, mentre il secondo serve a rendere l'equilibrio globalmente asintoticamente stabile. Ponendo $u_1 = \text{cotg } z_1 - \alpha z_2^3 + z_1$ si ottiene che l'origine diventa unico punto di equilibrio ed inoltre il sistema risulta lineare. Per rendere l'equilibrio asintoticamente stabile occorre allocarne i poli nel semipiano a parte reale negativa, e ció puó essere fatto tramite un secondo termine dell'ingresso nella forma $u_2 = az_1 + bz_2$, con le costanti $a$ e $b$ scelte in maniera opportuna.