Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici — 04 Giugno 2004

Numero di matricola						
	–	–	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	–

Si consideri il sistema elettromeccanico illustrato in fig.1, in cui un motore elettrico in corrente continua comandato in armatura, agisce su un carico mediante una molla torsionale di elasticità K_{tr}. Il sistema

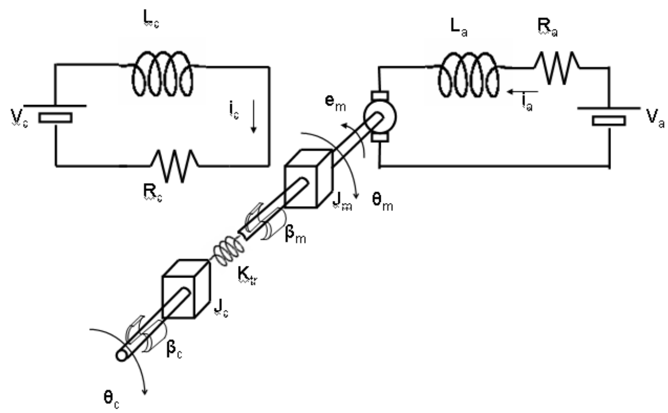

Figure 1: Modello del sistema

risulta descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} L_a \dot{i}_a + R_a i_a + e_m = V_a \\ J_m \ddot{\theta}_m + \beta_m \dot{\theta}_m + K_{tr}\theta_m = C_m + K_{tr}\theta_c \\ J_c \ddot{\theta}_c + \beta_c \dot{\theta}_c + K_{tr}\theta_c = K_{tr}\theta_m \end{cases}$$

dove $e_m = K_e \dot{\theta}_m$ e $C_m = K_m i_a$ rappresentano rispettivamente la forza controelettromotrice e la coppia motrice generata dal motore. Sull'albero motore, avente momento di inerzia J_m e sul carico (momento di inerzia J_c) sono calettati due cuscinetti a sfera caratterizzati rispettivamente dai coefficiente di attrito dinamico β_m e β_c. Con V_a, i_a, R_a, L_a sono indicate la tensione, la corrente, la resistenza e l'induttanza del circuito di armatura del motore. I valori numerici del sistema sono i seguenti: $\beta_m = (0.01 + \alpha\, 10^{-3}) Ns/m$, $\beta_c = 0.1 Ns/m$, $L_a = (0.01 + \beta\, 10^{-3}) H$, $R_a = (5.5 + \gamma\, 10^{-2})\Omega$, $K_{tr} = 500 N/m$, $K_m = 0.004 Nm/A$, $J_m = 5\, 10^{-7} Kg\, m^2$, $J_c = 5\, 10^{-5} Kg\, m^2$ e $K_e = 7.1\, 10^{-5} V/(rad/s)$.
Si vuole controllare la posizione angolare del carico θ_c mediante l'ingresso V_a.
Si specifichi la funzione di trasferimento del sistema e si progetti un controllore dinamico in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

A) Raggiungere esattamente i valori sia di posizione che di velocità impostati come riferimento costante;

B) Quando per riferimento sia data una rampa lineare di velocità pendenza unitaria, verificare che l'errore di inseguimento a regime sia minore di $0.1 rad/s^2$;

C) Partendo da fermo, il carico compia un giro completo attorno al proprio asse, senza superare mai quota $6.4 rad$ e rimanendo confinato tra i $5.97 rad$ e i $6.4 rad$, entro un tempo non superiore a $0.1 s$;

D) I disturbi di misura con contenuto frequenziale maggiore di 4KHz siano attenuati in misura non inferiore a 10000 volte;

E) Verificare che il controllore trovato permetta al sistema di non discostarsi per più del 10% dalla quota raggiunta a regime, nonostante una incertezza del 5% sul valore della costante elastica della molla torsionale.

Si chiede inoltre di riportare i diagrammi di Bode in anello aperto del sistema controllato, riportando i vincoli derivanti dalle specifiche.

Soluzione

Scegliendo le variabili di stato $(i_a, \theta_m, \dot{\theta}_m, \theta_c, \dot{\theta}_c)$, il sistema può essere posto nella forma di stato A, B, C, D con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_e}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_m}{J_m} & \frac{-K_{tr}}{J_m} & \frac{-\beta_m}{J_m} & \frac{K_{tr}}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_{tr}}{J_c} & 0 & \frac{-K_{tr}}{J_c} & \frac{-\beta_c}{J_c} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{C} = [0\ 0\ 0\ 1\ 0]$ e $D = 0$.

Le soluzioni del compito vengono riportate con i valori numerici $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Si può calcolare la f.d.t $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, ottenendo:

$$G(s) = \frac{8\,10^{12}}{s\,(s^4 + 22550\,s^3 + 1.062\,10^9\,s^2 + 2.778\,10^{12}\,s + 1.21\,10^{15})}.$$

Il sistema risulta di ordine 5 e stabile a ciclo aperto.

A Essendo il sistema di tipo 1 la specifica sull'errore a gradino è già verificata, mentre per annullare l'errore alla rampa, a regime, occorre inserire un polo nel controllore.

B Per rispettare questa specifica si potrebbe inserire un ulteriore polo nell'origine. In questo modo l'errore alla rampa per il principio del modello interno sarebbe nullo. Tuttavia un sistema con tre poli nell'origine sarebbe di difficile stabilizzazione. Pertanto risulta più conveniente agire sul guadagno statico del controllore. Per il teorema del valore finale si deve imporre che: $\lim_{s\to 0} sE(s) < 0.1$, dove $E(s) = \frac{1}{1+C(s)\,G(s)}U(s)$, con $U(s) = \frac{1}{s^3}$ trasformata di Laplace di $u(t) = \frac{t^2}{2}$

Facendo le opportune semplificazioni si vede che la specifica è rispettata se: $K_c > 3030$. Scegliendo un $K_c = 6060$, il controllore fin qui progettato risulta essere così fatto:

$$C(s) = \frac{6060}{s}\hat{C}(s),$$

con $\hat{C}(0) = 1$.

C La specifica sulla piccola sovraelongazione può essere ottenuta inserendo uno zero in $s = -1.19$. In questo modo il sistema taglia l'asse a $0db$ con una pendenza di $-20db/dec$, pertanto si può approssimare il sistema utilizzando il modello del prim'ordine caratterizzato da un margine di fase elevato (vicino a $\pi/2$). Inoltre la pulsazione di taglio necessaria a garantire il tempo di assestamento richiesto è data da $w_n = \frac{3}{T_a} = 30\,rad/s$.

D La funzione di trasferimento tra l'uscita ed il disturbo sul sensore di misura è: $Y = -\frac{CG}{1+CG}D$. Per avere una buona attenuazione deve essere quindi $\frac{|C(j\omega)G(j\omega)|}{|1+C(j\omega)G(j\omega)|} < 10^{-4}$. Dovendo essere molto piccolo $|C(j\omega)G(j\omega)|$, lo si può trascurare rispetto a 1 per cui la relazione da soddisfare risulta essere: $|C(j\omega)G(j\omega)| < -80db$ per pulsazioni superiori a $\omega \approx 25133 rad/sec$. La figura 2, mostra come questa condizione sia soddisfatta.

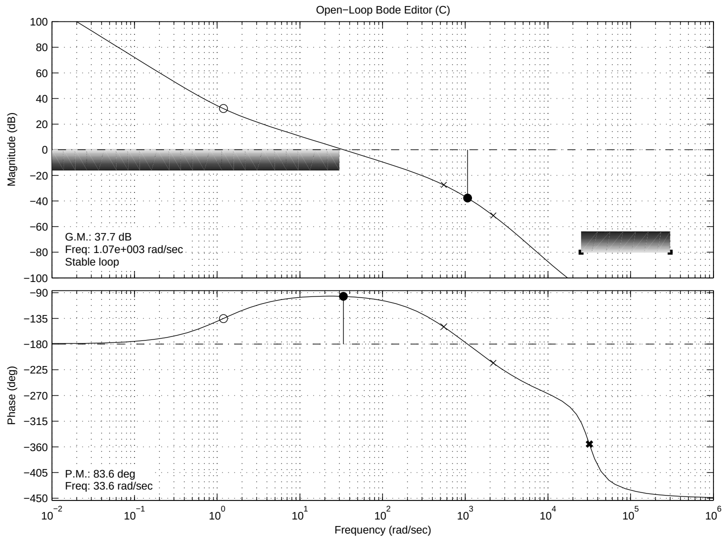

Figure 2: Diagrammi di Bode (ampiezza e fase) del guadagno di anello dopo aver inserito uno zero nel controllore per la specifica sulla sovraelongazione.

Al fine di rendere il controllore strettamente causale si aggiunge un polo in alta frequenza nel controllore. Il controllore finale ha la seguente forma:

$$C(s) = 6060\,\frac{1+0.84s}{s(1+0.00061s)}.$$

In fig. 3 e in fig. 4 sono riportati i diagrammi di Bode del sistema controllato e la risposta al gradino.

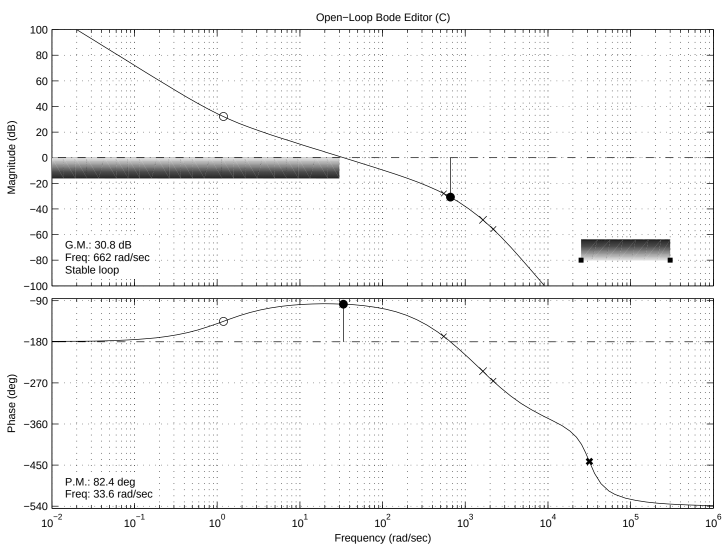

Figure 3: Diagrammi di Bode (ampiezza e fase) del guadagno di anello con il controllore finale.

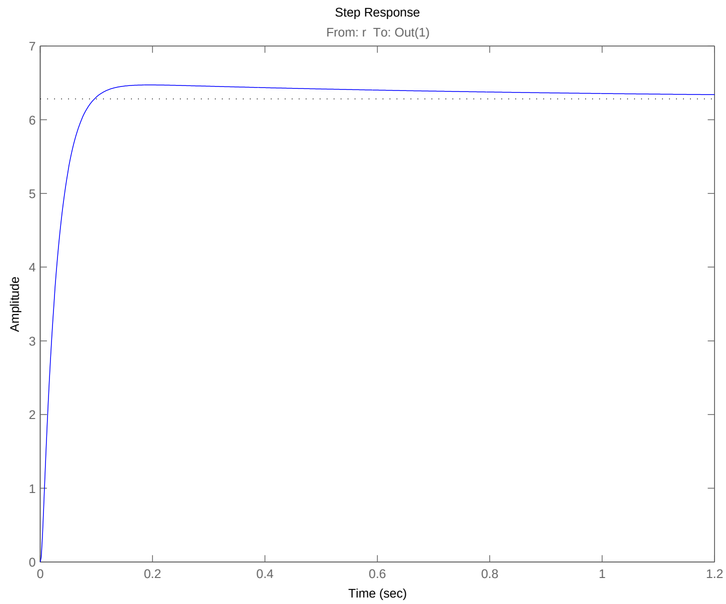

Figure 4: Risposta al gradino di ampiezza 2π del sistema controllato.

E Questa specifica può essere tradotta nell'imporre che $\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} \leq 0.1$ quando $s \to 0$.

$$\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = \frac{S_{K_{tr}}(s)}{1+CG} \frac{\Delta K_{tr}}{K_{tr}}$$

dove $S_{K_{tr}}(s)$ è la funzione di sensibilità del sistema rispetto al parametro al $S_{K_{tr}}(s)$ in anello aperto, e $\frac{\Delta K_{tr}}{K_{tr}} = 0.05$, essendo l'incertezza relativa del parametro K_{tr}. Ricordando che

$$S_{K_{tr}}(s) = \frac{\partial G(s, K_{tr})}{\partial K_{tr}} \frac{K_{tr}}{G(s, K_{tr})}$$

la specifica si traduce nell'imporre che al tendere di s a zero valga

$$\left| \frac{\partial G}{\partial K_{tr}} \frac{1}{G} \frac{1}{1+CG} \right| \leq \frac{0.1}{0.05 K_{tr}} = 1000 \tag{1}$$

Per la presenza di un polo nell'origine sia nella funzione di trasferimento $G(s)$ che nel controllore, per $s \to 0$ si ha che $\frac{1}{G} \frac{1}{1+CG} \simeq s^3$. È quindi sufficiente mostrare che per $s \to 0$ in $\frac{\partial G}{\partial K_{tr}}$ non ci siano tre singolarità nell'origine. Infatti, in tal caso, il limite per s che tende a zero del primo membro della (1) tende a zero e di conseguenza la specifica è verificata.

Sia $G(s) = \frac{1}{s} \frac{N(s)}{D(s)}$, si noti che $D(0) \neq 0$. Si ha che

$$\frac{\partial G}{\partial K_{tr}} = \frac{1}{s} \frac{\frac{\partial N}{\partial K_{tr}} D - N \frac{\partial D}{\partial K_{tr}}}{D^2}.$$

Il fatto che $D(0) \neq 0$ ci consente di concludere che in $\frac{\partial G}{\partial K_{tr}}$ c'è una e una sola singolarità nell'origine.