Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 21-06-2004

Si consideri il modello approssimato del sistema meccanico formato da un doppio pendolo e riportato nella figura 1.

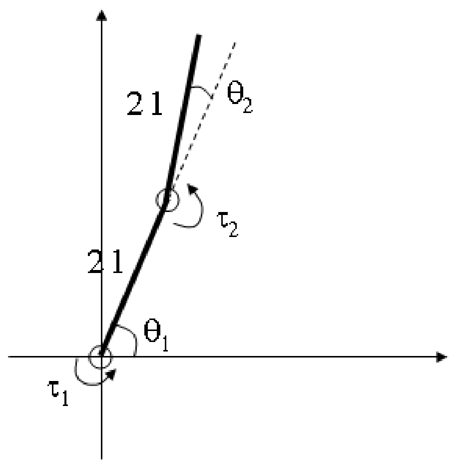

Figure 1: Sistema Meccanico rappresentato da un doppio pendolo

Se l'angolo di inclinazione del secondo pendolo rispetto all'inclinazione del primo è piccolo il sistema è descritto in prima approssimazione dalle equazioni:

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 = \tau_1 - 2\tau_2 + mgl\sin\theta_1 + 2ml^2\dot{\theta}_1^2\theta_2 + l^2m\theta_2\dot{\theta}_2^2 + 2l^2m\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 = -2\tau_1 + 5\tau_2 - 5ml^2\dot{\theta}_1^2\theta_2 - mgl\sin\theta_1 - 2ml^2\theta_2\dot{\theta}_2^2 - 4ml^2\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{cases} \tag{1}$$

dove $m = 0.5\,Kg$ sono le masse delle due aste rigide e $l = 0.1\,m$ è la semilinghezza delle due aste. θ_1 è l'angolo che forma la prima asta con l'asse delle ascisse mentre θ_2 è l'angolo che forma la seconda asta rispetto alla prima.

Siano τ_1 e τ_2 le coppie applicate dagli attuatori ai giunti e θ_1 e θ_2 le misure ottenibili dagli encoder.

Considerando il sistema 1:

A Si determinino tutte le configurazioni di equilibrio per ingresso $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e se ne fornisca una rappresentazione grafica.

B Si determini la matrice dinamica del sistema linearizzato intorno all'equilibrio $\theta_1 = \pi$ e $\theta_2 = 0$.

C Si considerino i quattro sistemi costruibili con un solo sensore ed un solo attuatore:

- **M1** Ingresso τ_1, Uscita θ_1,
- **M2** Ingresso τ_1, Uscita θ_2,
- **M3** Ingresso τ_2, Uscita θ_1,
- **M4** Ingresso τ_2, Uscita θ_2.

dove si suppone che al giunto non attuato valga $\tau_i = 0$. Si studino le proprietà di controllabilità e osservabilità dei quattro sistemi.

D Per ognuno dei sistemi si determini se è possibile progettare un regolatore che renda il sistema asintoticamente stabile. Nei casi in cui sia possibile si progettino i relativi regolatori in modo tale che i sistemi retroazionati abbiano i poli in anello chiuso in $-1500 \quad -1.5 + 6.4i \quad -1.5 - 6.4i \quad -1$ (poli della retroazione) e in $-1.4 + 10i \quad -1.4 - 10i \quad -4 \quad -1$ (poli dell'osservatore).

E Si connettano i regolatori ottenuti al passo precedente con il sistema non lineare e si confrontino a livello simulativo i risultati ottenuti. In particolare si confrontino i sistemi rispetto alla Regione di Asintotica Stabilità.

Si raccomanda di fornire una spiegazione fisica per ogni domanda

Soluzione

A Il moto di riferimento del sistema è caratterizzato da $\theta = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, $\ddot{q} = 0$ e $q = V$. Quindi, per mantenere il sistema lungo il moto di riferimento è necessaria una forza $F = \bar{F} = m\,g \sin\alpha = 692,96 Kgp$.

B Scegliendo come variabili di stato $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q})$ il linearizzato è caratterizzato dalle matrici:

$$A = \frac{\partial f(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{-mg+3\sqrt{2}\bar{F}}{ml} & \frac{\sqrt{2}V}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg\sqrt{2}+4\bar{F}}{m} & -V & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9.8 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 13.8593 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{ml} \\ 0 \\ -\frac{2}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{200} \\ 0 \\ -\frac{1}{50} \end{bmatrix}.$$

Se si sceglie come uscita il valore θ, la matrice delle uscite è $C_\theta = [1\,0\,0\,0]$, se invece si sceglie il valore q, la matrice delle uscite è $C_q = [0\,0\,1\,0]$.

Calcolando il rango della matrice di raggiungibilità per l'ingresso F ($R = [B, AB, A^2B, A^3B]$) si ottiene che il sistema è completamente raggiungibile. Alternativamente, usando il comando Matlab `rank(ctrb(A,B))` si ottiene subito che la matrice di controllabilità ha rango pieno e pari a 4. Il risultato ottenuto è di facile interpretazione fisica: il sistema è infatti in grado di raggiungere qualsiasi configurazione (e.g. posizione e velocità angolare) in un tempo arbitrariamente piccolo.

La matrice di osservabilità

$$O_\gamma = \begin{bmatrix} C_\gamma \\ C_\gamma A \\ C_\gamma A^2 \\ C_\gamma A^3 \end{bmatrix}$$

nel caso in cui $\gamma = \theta$ ha rango 2 mentre ha rango 4 nel caso in cui $\gamma = q$. Questo si può vedere anche con i comandi Matlab `rank(obsv(A,`C_θ`))` e `rank(obsv(A,`C_q`))`.

C Le funzioni di trasferimento, che si ottengono con i comandi Matlab G_θ`=tf(ss(A,B,`C_θ`,0))` e G_q`=tf(ss(A,B,`C_q`,0))`, sono:

$$G_\theta = \frac{0.007071}{s^2 + 0.7071s + 9.8}$$

$$G_q = \frac{-0.02s^2 - 0.007071s - 0.098}{s^2(s^2 + 0.7071s + 9.8)}$$

La funzione di trasferimento G_θ ha ordine 2, non ha zeri e non ha i due poli nell'origine che ha invece la G_q.

D Per progettare un regolatore usando le uscite q e θ del sistema si può procedere in vari modi.

Il primo modo che descriviamo è quello di scegliere come uscita la sola q per la quale il sistema risulta completamente raggiungibile e osservabile. Sia $sys = ss(A, B, C_\theta, D)$, il progetto del regolatore si ottiene con i seguenti comandi matlab:

- Retroazione: la matrice di retroazione K tale che gli autovalori di $A - BK$ siano in -1, -2, -1, -2, è ottenibile dal comando matlab

```
>>p=[-1 -2 -1 -2];
>>K=acker(A,B,p)
  K= 217.5984  410.5200  -40.8163 -119.5039
```

- Stimatore: la matrice L di iniezione delle uscite sugli stati tale che gli autovalori di $A - LC$ siano in -10, -20, -10, -20 è ottenibile dal comando matlab

```
>>q=[-10 -20 -10 -20]
>>L=transpose(acker(A',C',q))
  L =
 1.0e+003 *
    0.6157
    2.0035
    0.0593
    1.2483
```

- Regolatore: il regolatore si ottiene con il comando matlab `rsys= reg(sys,K,L)`. La funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore (ottenibile con il comando `tf(rsys)`) risulta

$$R(s) = \frac{-8.048\,10^5 s^3 + 3.363\,10^6 s^2 + 5.27\,10^6 s + 1.633\,10^6}{s^4 + 65.29 s^3 + 1617 s^2 + 3.491\,10^4 s + 2.752\,10^4}$$

- Sistema regolato: il sistema regolato si ottiene con il comando `fsys=feedback(series(rsys,sys),1,+1)` e la funzione di trasferimento risulta

$$G_R(s) = \frac{16096.9433(s-5.449)(s+0.8108)(s+0.4591)(s^2+0.3536s+4.9)}{(s+20)^2(s+10)^2(s+2)^2(s+1)^2}$$

Con la stessa procedura è possibile costruire il regolatore utilizzando entrambe le uscite e quindi vedendo il sistema come SIMO. L'unica accortezza è quella di utilizzare il comando Matlab `place` al posto del comando `acker`.

Un altro modo di procedere per la progettazione del regolatore è quella di utilizzare entrambe le uscite e la tecnica LQR:

```
>>c = [c_q; c_theta];
>>sys_SIMO = ss(A,b,c,d)
```

Si scelgono le matrici peso Q ed R:

```
>>Q = 10*eye(4);
>>R = 1;
```

La matrice di retroazione degli stati e la relativa posizione dei poli in anello chiuso, così come la matrice di iniezione delle uscite e la relativa posizione dei poli in anello chiuso, sono date da

```
>>[K_SIMO,S,p_SIMO] = LQR(A,b,Q,R);
>>[L_SIMO,S,q_SIMO] = LQR(A',c',Q,R);
>>L_SIMO = L_SIMO'
```

Il regolatore e il sistema regolato sono quindi ottenibili da

```
>>rsys_SIMO = reg(sys_SIMO, K_SIMO, L_SIMO)
>>fsys_SIMO = feedback(series(rsys_SIMO, sys_SIMO), eye(2), 1)
```

E Lo schema simlink per la simulazione del sistema non lineare controllato con il regolatore progettato sul linearizzato è riportato in figura 2. Nel blocco `Funzione non lineare` si trova la dinamica non lineare traslata delle quattro variabili di stato. Nel blocco "State-Space" ci sono le matrici del regolatore. Se nell'integratore le condizioni iniziali vengono poste a zero si ha che gli stati convergono all'origine a meno di errori di ordine di 10^{-17}. Se nel primo integratore si perturba la condizione iniziale si trova che la condizione iniziale $x_1(0) = 0.99$ è al di fuori della regione di asintotica stabilità perchè l'andamento della prima variabile diverge.

F Si cerca ora una sequenza di al più $20 = \frac{1sec}{0.05sec}$ controlli che siano limitati e che facciano variare lo stato $x_1 = \theta$ da 0 a 0.001 considerando le altre variabili di stato in condizioni di equilibrio e quindi nulle. Si chiede quindi di discretizzare il sistema con tempo di campionamento di $\Delta T = 0.05sec$ e quindi pianificare in al più 20 passi la traiettoria desiderata per la variabile x_2.

Con la tecnica di integrazione di Eulero in avanti si ottiene che le matrici del sistema discretizzato risultano $A_k = A\Delta T + eye(8)$, $B_k = B\Delta T$, $C_k = C$ e $D_k = 0$. Il sistema discretizzato risulta completamente raggiungibile ed è quindi possibile applicare tecniche di pianificazione ottima.

Una procedura automatica per il calcolo della matrice di raggiungibilità in 20 passi Rck è data da

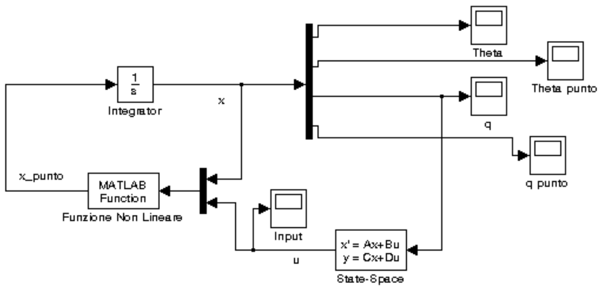

Figure 2: Schema Simulink del sistema non lineare controllato con il regolatore che ha come ingresso la variabile q.

```
Rck = bk;
for i=1:19
    [m,n] = size(Rck);
    RR = Rck(:,n);
    Rck = [Rck,Ak*RR];
end
```

La sequenza di controlli a modulo minimo che porta il sistema dallo stato iniziale

```
x0 = [0; 0; 0; 0]
```

allo stato finale

```
xt = [0.001; 0; 0; 0]
```

è data dalla soluzione del problema di pianificazione ottima e cioè da

```
u20 = Rck' * inv(Rck * Rck')*(xt - Ak^20*x0).
```

La sequenza di 20 controlli così trovata è:

-10.5009, -5.5194, -1.5559, 1.4133, 3.4368, 4.5873, 4.9595, 4.6690, 3.8486, 2.6459, 1.2196, -0.2645, -1.6370, -2.7298, -3.3796, -3.4325, -2.7474, -1.2003, 1.3131, 4.8742

Sicuramente possono bastare 4 passi per raggiungere la configurazione desiderata in quanto il sistema è completamente raggiungibile. Con una procedura equivalente a quella descritta si può provare a vedere se è possibile raggiungere lo stato desiderato in meno di 4 passi. Alternativamente si verifica se la differenza tra lo stato desiderato e quello iniziale appartiene all'immagine della matrice di raggiungibilità in un passo, due passi e tre passi. Sia $v = [0.001, 0, 0, 0]'$ la differenza tra lo stato desiderato e quello iniziale, per verificare se il numero minimo di passi in cui si raggiunge lo stato è 1 è sufficiente calcolare il rango della matrice: $[b, v]$ avendo questa rango 2 lo stato desiderato non è raggiungibile in un passo. La matrice $[b, Ab, v]$ ha rango 3 e quindi lo stato desiderato non è raggiungibile in due passi, infine la matrice $[b, Ab, A^2b, v]$ ha rango 4 e quindi lo stato desiderato non è raggiungibile in tre passi. Concludendo il minimo numero di passi per cui è possibile raggiungere lo stato desiderato è 4.