Controlli Automatici — 14 Settembre 2004

Numero di matricola						
	–	–	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	–

A) Con riferimento alla fig.1, si discuta la raggiungibilità e la osservabilità del sistema sottoposto ad ingresso f e con misura della posizione della prima massa y_1, al variare delle costanti elastiche delle molle. Si trovino i casi nei quali alcune di tali proprietà non sono verificate e si fornisca una interpretazione fisica di tali casi. (Suggerimento: usare la f.d.t. del sistema)

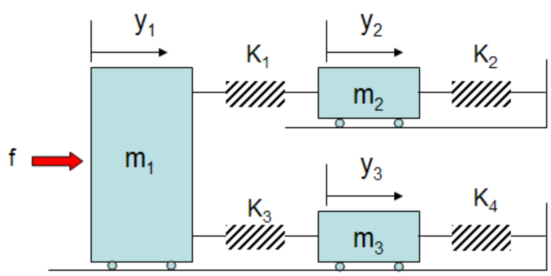

Figure 1: Sistema meccanico da studiare

B) Si consideri il sistema di fig.2, in cui lo smorzatore e la molla siano elementi nonlineari, rispettivamente con caratteristica $f_s = c\dot{y}^3$ e $f_m = ky^3$. Si studi la stabilità del sistema al variare dei parametri $c \geq 0$ e $k \geq 0$ (Suggerimento: usare come candidata di Lyapunov la energia meccanica del sistema).

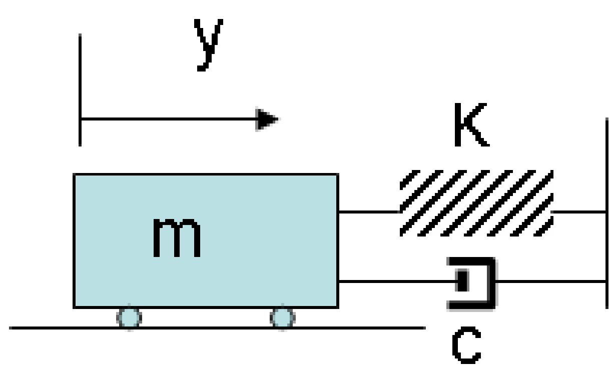

Figure 2: Sistema meccanico con molla e smorzatore non-lineari

Soluzione

A) Indicando con y_i le posizioni della massa m_i, $i = 1, 2, 3$ le equazioni del moto del sistema sono le seguenti:

$$\begin{array}{c} m_1\ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y_2) + k_3(y_1 - y_3) = f \\ m_2\ddot{y}_2 + k_1(y_2 - y_1) + k_2 y_2 = 0 \\ m_3\ddot{y}_3 + k_3(y_3 - y_1) + k_4 y_3 = 0 \end{array}$$

Applicando la trasformata di Laplace alle equazioni appena scritte, e ponendo $p_1(s) = m_1 s^2 + k_1 + k_3$, $p_2(s) = m_2 s^2 + k_1 + k_2$, $p_3(s) = m_3 s^2 + k_3 + k_4$, si ottengono le relazioni:

$$\begin{array}{c} p_1(s)Y_1(s) - k_1 Y_2(s) - k_3 Y_3(s) = f \\ Y_2(s) = \frac{k_1}{p_2(s)} Y_1(s) \\ Y_3(s) = \frac{k_3}{p_3(s)} Y_1(s), \end{array}$$

da cui

$$\left(p_1(s) - \frac{k_1^2}{p_2(s)} - \frac{k_3^2}{p_3(s)} \right) Y_1(s) = F(s),$$

e infine

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{p_2(s)p_3(s)}{p_1(s)p_2(s)p_3(s) - k_1^2 p_3(s) - k_3^2 p_2(s)}.$$

Essendo il denominatore della f.d.t. considerata di ordine 6 (ogni polinomio $p_i(s)$ è del secondo ordine), il sistema di tre masse è completamente raggiungibile ed osservabile se e solo se non vi sono cancellazioni polo/zero.

Si può avere una cancellazione se $k_1 = 0$: in tal caso infatti, le radici (immaginarie) di $p_2(s) = 0$ sono comuni a numeratore e denominatore. Il modo oscillante corrispondente è quindi non osservabile, oppure non raggiungibile, o entrambe. Dalla osservazione fisica del sistema, si capisce facilmente che è il terzo il caso che si applica al nostro esempio: infatti il moto della massa m_2 non è influenzato dall'ingresso f, né influenza l'uscita y_1 quando $k_1 = 0$.

Analoghe conclusioni si raggiungono nel caso $k_3 = 0$, per quel che riguarda la irraggiungibilità e la inosservabilità dei modi propri della massa m_3.

Un ultimo caso, meno banale, di cancellazione si può avere con k_1 e k_3 non nulle, quando $p_2(s)$ e $p_3(s)$ hanno radici comuni, cioè quando

$$\frac{k_1 + k_2}{m_2} = \frac{k_3 + k_4}{m_3}.$$

Ponendo ad esempio $p_2(s) = p(s)$ e $p_3(s) = \alpha p(s)$, si ha

$$\frac{Y_1(s)}{F(s)} = \frac{\alpha p^2(s)}{\alpha p_1(s)p^2(s) - (\alpha k_1^2 + k_3^2)p(s)} = \frac{\alpha p(s)}{\alpha p_1(s)p(s) - (\alpha k_1^2 + k_3^2)}$$

In questo caso, la cancellazione è causata dalla uguaglianza dei rapporti tra coefficienti elastici e inerziali dei due sottosistemi oscillanti collegati alla prima massa. La raggiungibilità del sistema è compromessa, in quanto non è possibile far raggiungere al sistema complessivo stati arbitrari a partire da condizioni iniziali arbitrarie: i due sottosistemi interni, se inizializzati con posizioni e velocità uguali, non potranno evidentemente essere mai portati ad avere stati diversi in quanto eccitati dallo stesso moto di m_1.

Anche la osservabilità è persa: infatti, una oscillazione di pari ampiezza e frequenza delle due masse, ma in opposizione di fase, darebbe effetto risultante nullo sulla massa m_1, quindi sulla misura.

È naturalmente possibile trovare identici risultati studiando il sistema nello spazio di stato, con le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_3}{m_3} & 0 & -\frac{k_3+k_4}{m_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le matrici di raggiungibilità e osservabilità sono

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & -\frac{k_1+k_3}{m_1^2} & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_1}{m_1 m_2} & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_3}{m_1 m_3} & 0 & c \\ \frac{1}{m_1} & 0 & -\frac{k_1+k_3}{m_1^2} & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{m_1 m_2} & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_3}{m_1 m_3} & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} \\ am_1 & bm_2 & cm_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & am_1 & bm_2 & cm_3 \end{bmatrix}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{(k_1+k_3)^2}{m_1^3} + \tfrac{k_1^2}{m_1^2 m_2} + \tfrac{k_3^2}{m_1^2 m_3}, \\ b &= -\tfrac{k_1}{m_1 m_2}\left(\tfrac{k_1+k_3}{m_1} + \tfrac{k_1+k_2}{m_2}\right), \\ c &= -\tfrac{k_3}{m_1 m_3}\left(\tfrac{k_1+k_3}{m_1} + \tfrac{k_3+k_4}{m_3}\right). \end{aligned}$$

Mediante scambio di righe o colonne (operazioni che non cambiano il rango di una matrice), si può riscrivere

$$R = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; \quad O = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$$

dove

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{k_1+k_3}{m_1^2} & a \\ 0 & \frac{k_1}{m_1 m_2} & b \\ 0 & \frac{k_3}{m_1 m_3} & c \end{bmatrix}.$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_3}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_3}{m_1} \\ am_1 & bm_2 & cm_3 \end{bmatrix}.$$

Sia R che O perdono rango esattamente dove perdono rango M e N, cioè quando

$$c\frac{k_1}{m_2} - b\frac{k_3}{m_3} = 0,$$

ovvero quando

$$k_1 k_3 \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2} - \frac{k_3 + k_4}{m_3}\right) = 0,$$

da cui

- se $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, e $\frac{k_1+k_2}{m_2} \neq \frac{k_3+k_4}{m_3}$, il sistema è completamente controllabile con f e osservabile da y_1;
- se $k_1 = 0$ e $k_3 \neq 0$, oppure se $k_1 \neq 0$ e $k_3 = 0$, il sottosistema non raggiungibile e non osservabile ha dimensione due;
- se $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, ma $\frac{k_1+k_2}{m_2} = \frac{k_3+k_4}{m_3}$, il sottosistema non raggiungibile e non osservabile ha ancora dimensione due.

B) Scelto come vettore di stato $x = (y, \dot{y}) = (x_1, x_2)$, si ottiene la dinamica:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1^3 - \frac{c}{m}x_2^3 \end{cases}$$

Se $k \neq 0$ l'unico punto di equilibrio risulta l'origine $\bar{x} = (0, 0)$. Il linearizzato del sistema é il seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3k}{m}x_1^2 & -\frac{3c}{m}x_2^2 \end{pmatrix}$$

che, calcolato nell'origine, vale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avendo il linearizzato autovalori nulli, non ci permette di dedurre alcunché riguardo alla stabilitá del sistema. Ricaviamo allora la funzione di Lyapunov. L'energia meccanica del sistema è data dalla somma della energia cinetica $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ e della energia potenziale elastica $U = \int_0^y kw^3 dw = \frac{k}{4}y^4$. Posto $V = U + T = \frac{k}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}mx_2^2$, si ottiene

$$\dot{V} = -cx_2^4,$$

quindi il sistema, per $k > 0$ e $c > 0$, è stabile. Per concludere sulla asintotica stabilità è necessario studiare ulteriormente il sistema col criterio di Lassalle/Krasovski: le traiettorie che rimangono nel luogo in cui si verifica $\dot{V} \equiv 0$ hanno $x_2 \equiv 0$, quindi anche $\dot{x}_2 = 0$, e ciò, per la seconda equazione dinamica del sistema, è possibile solo dove $x_1 = 0$. Quindi, essendo il massimo insieme invariante interno al luogo in cui $\dot{V} = 0$ costituito dalla sola origine, l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.

Nel caso $k \neq 0$, $c = 0$, la $\dot{V}$ è identicamente nulla al variare di x_1 e x_2, quindi non si può concludere per la asintotica stabilità. In effetti in tal caso il sistema è marginalmente stabile, essendo le traiettorie confinate a curve di livello della V: se il sistema è inizializzato in una condizione tale da avere $V(x(0)) = V_0$, essendo $\dot{V} \equiv 0$ sarà $V(x(t)) \equiv V_0$.

Nel caso $k = 0$, $c \neq 0$, tutti gli stati con $x_2 = 0$ e x_1 qualsiasi sono di equilibrio; inoltre, la funzione V sopra considerata non è positiva definita, né ha curve di livello chiuse, quindi non è a rigore una candidata di Lyapunov né di Lassalle. Si può però osservare in questo caso che il sistema è di fatto disaccoppiato, essendo la dinamica di x_2 indipendente da x_1:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2^3 \end{cases}$$

Per il sistema $\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2^3$ la candidata $V = \frac{m}{2}x_2^2$ è p.d., e $\dot{V} = -cx_2^4$ è n.d., quindi x_2 converge globalmente asintoticamente a zero. Naturalmente, altrettanto non si può dire per x_1, del quale sappiamo solo che tenderà ad un valore costante tanto più piccolo quanto minori sono le condizioni iniziali in x_1 e x_2. Gli stati con $x_2 = 0$, $\forall\ x_1$ sono dunque tutti equilibri marginalmente stabili.

Infine, nel caso $k = 0$, $c = 0$, il sistema è lineare, ed è instabile avendo due autovalori nulli con molteplicità geometrica uno (il sistema è ridotto ad una massa libera di muoversi sulla retta, per la quale una condizione iniziale arbitrariamente piccola sulla velocità $\dot{y} = x_2$ porta a divergenza della posizione $y = x_1$). Vale la pena osservare che, se il teorema di Lyapunov venisse applicato scorrettamente in questo caso ($k = c = 0$), cioè trascurando la necessaria ipotesi che V sia definita positiva, si potrebbe giungere (essendo $\dot{V} = 0$) a concludere falsamente per la stabilità del sistema.