

Numero di matricola

-	-	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	$= 10\delta - 1$
---	---	------------------	-----------------	------------------	------------------

Si consideri il sistema idraulico costituito da due serbatoi accoppiati rappresentato in fig.1. Un primo serbatoio, rifornito di liquido da una riserva a capacità infinita tramite una pompa elettrica alimentata da una tensione u , è collegato in cascata con un secondo serbatoio. Siano S_i ($i = 1, 2$) le aree delle sezioni trasversali dei due serbatoi e A_i le aree delle rispettive sezioni di scarico. Si assuma che la pompa fornisca una portata volumetrica pari a ku . Siano infine h_i ($i = 1, 2$) i livelli di liquido nei due serbatoi.

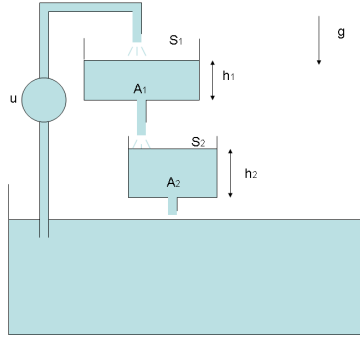


Figure 1: Sistema idraulico da controllare.

Ipotizzando il liquido incomprimibile e operando un bilancio energetico fra le sezioni di ingresso e di scarico dei due serbatoi, il sistema risulta descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 + M\sqrt{h_1} = Pu \\ \dot{h}_2 - Q\sqrt{h_1} + R\sqrt{h_2} = 0 \end{cases}$$

dove $M = \frac{A_1\sqrt{2g}}{S_1}$, $P = \frac{k}{S_1}$, $Q = \frac{A_1\sqrt{2g}}{S_2}$, $R = \frac{A_2\sqrt{2g}}{S_2}$. I parametri $S_1 = (10 + \alpha/10) m^2$ e $S_2 = (5 + \beta/20) m^2$ sono le aree delle sezioni trasversali dei due serbatoi e $A_1 = (0.2 + \gamma/100) m^2$ e $A_2 = (0.1 + \delta/100) m^2$ le aree delle sezioni di scarico. Si assuma $k = 1/500 m^3/(Vs)$ e $g = 9.81 m/s^2$. Le variabili h_1 ed h_2 rappresentano le quote dei livelli di liquido nei rispettivi serbatoi. Si desidera controllare il livello h_2 agendo sulla tensione di alimentazione della pompa u .

- A) Trovare la configurazione di equilibrio del sistema con $\bar{u} = \frac{MR}{QP}$ e il modello linearizzato nell'intorno di tale configurazione. Discutere la stabilità del linearizzato così ottenuto e indicarne i modi propri.
- B) Per il sistema linearizzato trovato al punto precedente, ricavare in forma possibilmente simbolica la funzione di trasferimento tra la variazione dell'ingresso $\tilde{u} = u - \bar{u}$ e la variazione dell'uscita $\tilde{h}_2 = h_2 - \bar{h}_2$. Riportare esplicitamente la forma di stato.
- C) Tracciare manualmente i diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase e i diagrammi di Nyquist. Verificare se con un semplice controllo proporzionale il sistema chiuso in retroazione risulta asintoticamente stabile.
- D) Si consideri il progetto di un controllore per la funzione di trasferimento ricavata al punto B) in modo da soddisfare le seguenti specifiche:
 - D1) Partendo dalla configurazione di equilibrio, il sistema raggiunga a regime esattamente il livello assegnato $h_{2r} = 1.1m$. Nel raggiungere questa quota il fluido non deve traboccare dal recipiente, le cui pareti sono alte $h_{2max} = 1.13m$. Si deve garantire inoltre che, dopo al più 50 secondi, il liquido rimanga confinato nella fascia di $\pm 5\%$ del valore di regime.
 - D2) Si ipotizzi che il trasduttore di misura sia affetto da rumore sinusoidale per frequenze superiori a $1.5Hz$. Si cerchi di attenuare tali disturbi di un fattore pari a 10^2 .
 - D3) Si ipotizzi inoltre che la tensione della pompa sia soggetta ad un disturbo di ampiezza $|u| \leq 10V$ con frequenza inferiore a $10^{-3}Hz$. Il controllore deve essere in grado di attenuare questo disturbo di un fattore 10.
 - D4) Si descriva esplicitamente la procedura di progetto del controllore, commentando i passaggi effettuati durante le varie fasi di progetto; si corredi la trattazione con i diagrammi di Bode e i luoghi delle Radici utilizzati e si riporti l'espressione analitica del controllore ricavato.

Soluzione

Scegliendo il vettore $X = (h_1, h_2)^T$ il sistema in forma di stato risulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -M\sqrt{x_1} + Pu \\ \dot{x}_2 = Q\sqrt{x_1} - R\sqrt{x_2} \end{cases}$$

A) Per ricavare la configurazione di equilibrio del sistema relativa ad \bar{u} si impone

$$\begin{cases} 0 = -M\sqrt{x_1} + Pu \\ 0 = Q\sqrt{x_1} - R\sqrt{x_2} \end{cases}$$

e valutando in $u = \bar{u}$ si ottiene $\bar{x}_1 = \frac{P^2\bar{u}^2}{M^2} = \frac{R^2}{Q^2}$ e $\bar{x}_2 = \frac{P^2Q^2\bar{u}^2}{R^2M^2} = 1$. Il sistema linearizzato in forma di stato è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \frac{-M}{2\sqrt{\bar{x}_1}} & 0 \\ \frac{Q}{2\sqrt{\bar{x}_1}} & \frac{-R}{2\sqrt{\bar{x}_2}} \end{pmatrix} \tilde{X} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{u} \stackrel{def}{=} A\tilde{X} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{X} \stackrel{def}{=} C\tilde{X}. \end{cases}$$

Sostituendo le condizioni di equilibrio nei termini \bar{x}_1 e \bar{x}_2 si ottiene la seguente matrice dinamica:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{MQ}{2R} & 0 \\ -\frac{Q^2}{2R} & -\frac{R}{2} \end{pmatrix}.$$

Osservando che la matrice A è in forma triangolare inferiore, i suoi autovalori coincidono con i termini della diagonale principale: $\lambda_1 = -\frac{MQ}{2R}$, $\lambda_2 = -\frac{R}{2}$. Essendo i due autovalori reali e negativi, il sistema linearizzato risulta asintoticamente stabile. I modi del sistema risultano $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$.

B) La funzione di trasferimento del sistema linearizzato in anello aperto considerando come ingresso la tensione della pompa $U(s)$ e come uscita la quota $H_2(s)$ risulta:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\frac{PQ^2}{2R}}{(s + \frac{MQ}{2R})(s + \frac{R}{2})}.$$

Alternativamente la stessa fdt può essere ricavata L-trasformando e risolvendo il sistema linearizzato. Fissando i parametri $\alpha = \beta = \gamma = 0$ si ottiene numericamente:

$$G(s) = \frac{3.544 \cdot 10^{-5}}{(s^2 + 0.1329s + 0.003924)}.$$

C) I diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase sono riportati in (fig.2). Dai tali diagrammi è possibile ricavare direttamente i diagrammi di Nyquist (fig.3). Per rispondere all'ultimo quesito applicando il Criterio di Nyquist ai diagrammi omonimi (fig.3) si può osservare come con un controllore puramente proporzionale $C(s) = K_c$ il sistema si mantenga comunque stabile qualunque sia il valore del guadagno, visto che il punto di coordinate $(-1 + j0)$ non risulta mai circondato.

D)-E) Consideriamo ora il progetto di un controllore in grado di garantire le specifiche statiche e dinamiche richieste. Ci si riferisce ad un sistema a blocchi in retroazione negativa come riportato in fig.4. Essendo l'impianto ad anello aperto asintoticamente stabile, come già specificato al punto A), per progettare il controllore è possibile operare direttamente sui diagrammi di Bode. Osservando che la fdt $G(s)$ non ha poli nell'origine, facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} \hat{C}(s), \quad \text{con} \quad \hat{C}(0) = 1,$$

si consideri la scelta del tipo t e della costante di guadagno K del controllore. Per rendere nullo l'errore a regime qualunque sia il valore assegnato del riferimento di quota h_2 è sufficiente introdurre un polo nell'origine nel controllore ($t = 1$). Le specifiche statiche conducono quindi ad una struttura del controllore del tipo $C(s) = \frac{1}{s} \hat{C}(s)$.

Con tale compensazione si ottiene il diagramma di Bode riportato in fig.5. La specifica sulla quota massima da raggiungere in un tempo fissato senza che il liquido trabocchi si traduce evidentemente in una specifica sulla sovralongazione e sul tempo di assestamento. In particolare risulta che:

$$S = \frac{|(h_{2max} - \bar{h}_2) - (h_{2r} - \bar{h}_2)|}{|(h_{2r} - \bar{h}_2)|} = \frac{0.13 - 0.1}{0.1} \approx 30\%.$$

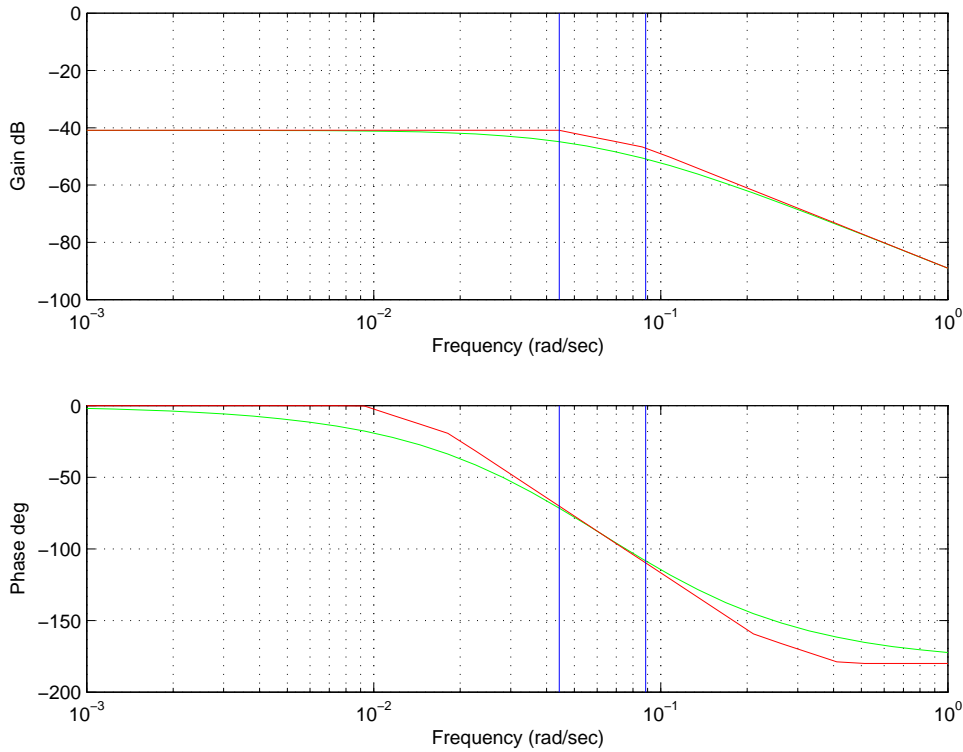


Figure 2: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase asintotici e reali della funzione di trasferimento ad anello aperto calcolata al punto **B**).

Ciò impone che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti pari a 0.3579 (come si ricava dalla espressione della sovralongazione dei sistemi di secondo ordine $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 36^\circ$. Tale specifica risulta attualmente ampiamente rispettata avendo il sistema un margine di fase di circa 73.1° (fig.5). La specifica sul tempo di assestamento, per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 0.17 \text{ rad/sec}$. Questa specifica in particolare si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$ intersechi l'asse a 0 db a pulsazioni superiori a 0.17 rad/sec . Tale condizione non è rispettata avendo attualmente una pulsazione di taglio di 0.0081 rad/sec (fig.5). Per migliorare la pulsazione di taglio si potrebbe agire aumentando il guadagno del controllore ottenendo tuttavia valori ancora insufficienti e una drastica riduzione del margine di fase fino all'instabilità. Risulta allora conveniente utilizzare una doppia azione anticipatrice. Ponendo ad esempio due zeri reali, entrambi in -0.1 e aumentando il guadagno del controllore si ottengono i diagrammi di Bode riportati fig.6. In tal caso si hanno un margine di fase di 73.1° e una pulsazione di taglio di 0.198 rad/sec e quindi entrambe le specifiche risultano rispettate.

Si consideri ora la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza; nelle pulsazioni di interesse deve essere $|C(s)G(s)| < 10^{-2}|1 + C(s)G(s)|$. Ciò equivale approssimativamente a chiedere che sia $|C(j\omega)G(j\omega)|_{\text{db}} \leq -40 \text{ db}, \forall \omega > 2\pi \cdot 1.5 \approx 9.425 \text{ rad/s}$. Si garantisce questa specifica inserendo nel compensatore un polo ad alta frequenza, ad es. in -5 , ottenendo il diagramma di Bode riportato in fig.7.

Per quanto riguarda l'ultima specifica basta considerare la funzione di trasferimento fra il disturbo d e l'uscita y_d :

$$Y_d(s) = \frac{G}{1 + CG}d(s).$$

Essendo l'ampiezza del disturbo contenuta nella banda di interesse (al massimo 10 V per pulsazioni minori di 0.00628 rad/s), è possibile utilizzare il teorema della risposta armonica. Nell'ipotesi di sistema a regime si ha:

$$|y_d(t)_{\text{reg}}| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{\omega \leq 0.00628 \text{ rad/s}} \cdot 10$$

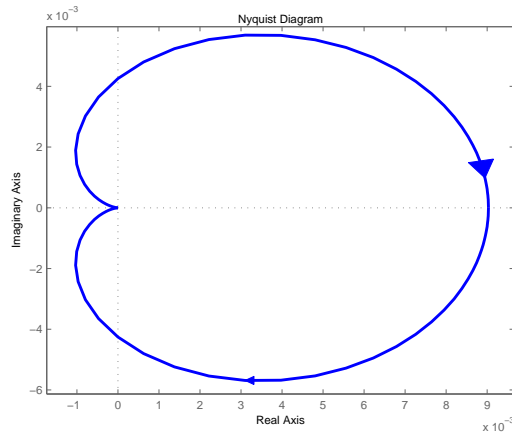


Figure 3: Diagrammi di Nyquist per la funzione di trasferimento calcolata al punto **B**).

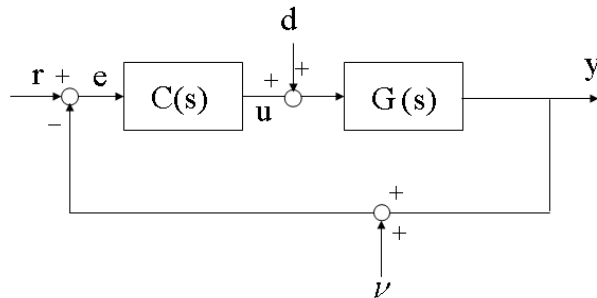


Figure 4: Schema a blocchi utilizzato per il controllo del sistema

Bisogna imporre che $|\frac{G(j\omega)}{1+C(j\omega)G(j\omega)}|_{\omega \leq 0.00628 rad/s} \leq \frac{1/10}{10} = 0.01$. Essendo nella banda di interesse $C(j\omega)G(j\omega) \gg 1$ allora:

$$|\frac{G}{1+CG}| \approx |\frac{G}{CG}| = |\frac{1}{C}|.$$

Si ha quindi che $|C|_{\omega \leq 0.00628 rad/s} \geq 100$, ovvero $|C|_{db} \geq 40$. Osservando i diagrammi di Bode del controllore $C(s)$ riportati in 8, tale specifica risulta già soddisfatta.

Il controllore risultante è dato da

$$C(s) = 50 \frac{(1 + 10s)^2}{s(1 + 0.2s)}.$$

A verifica finale del progetto del controllore, riportiamo la risposta al gradino del sistema in anello chiuso in figura 9

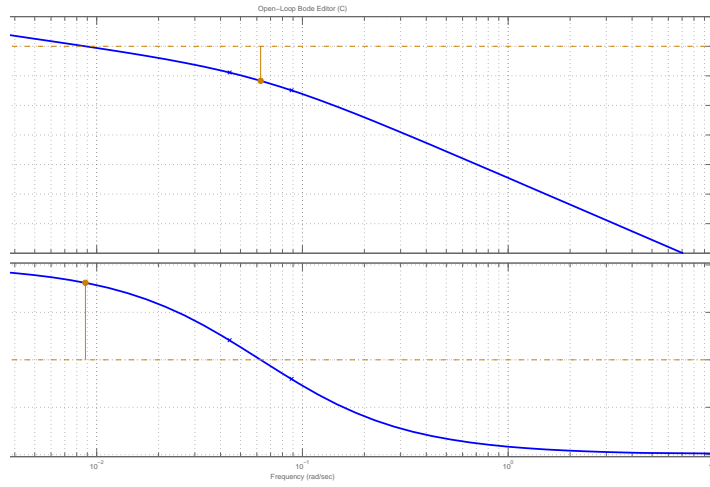


Figure 5: Diagrammi di Bode ottenuti con il controllore $C(s) = \frac{1}{s}$.

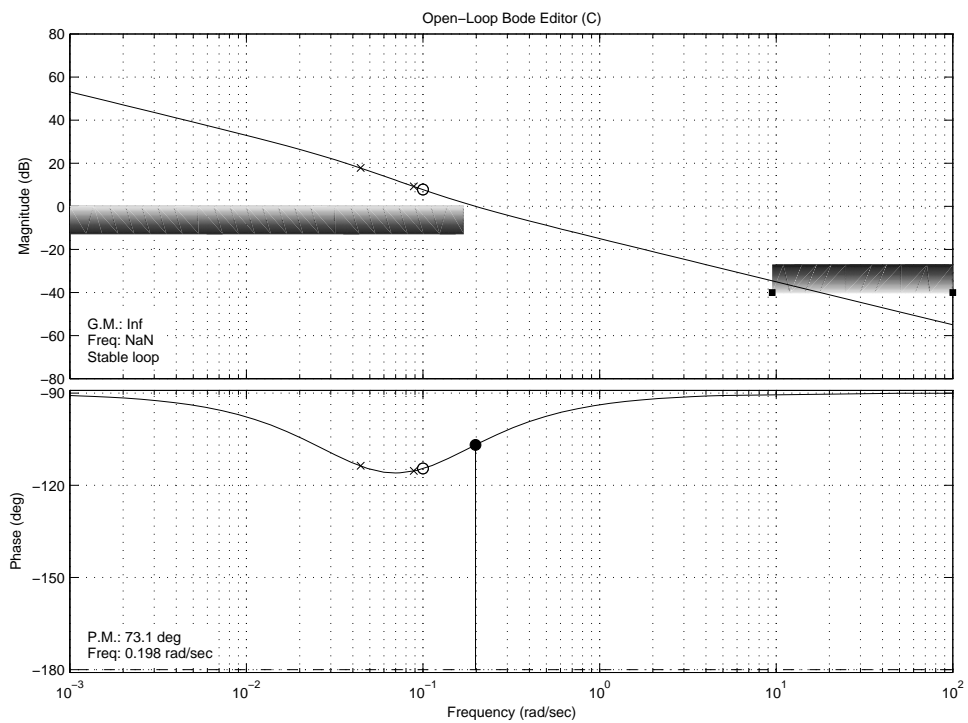


Figure 6: Diagramma di Bode del sistema dopo la compensazione $C(s) = 50 \frac{(1+10s)^2}{s}$

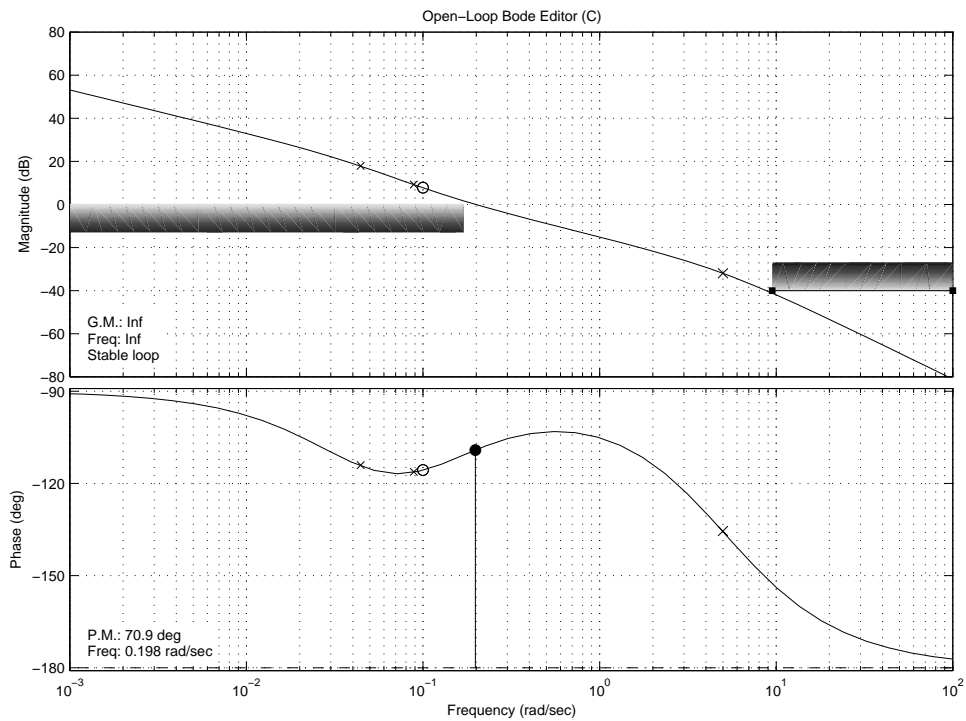


Figure 7: Diagrammi di Bode relativi al sistema con la compensazione del disturbo di misura.

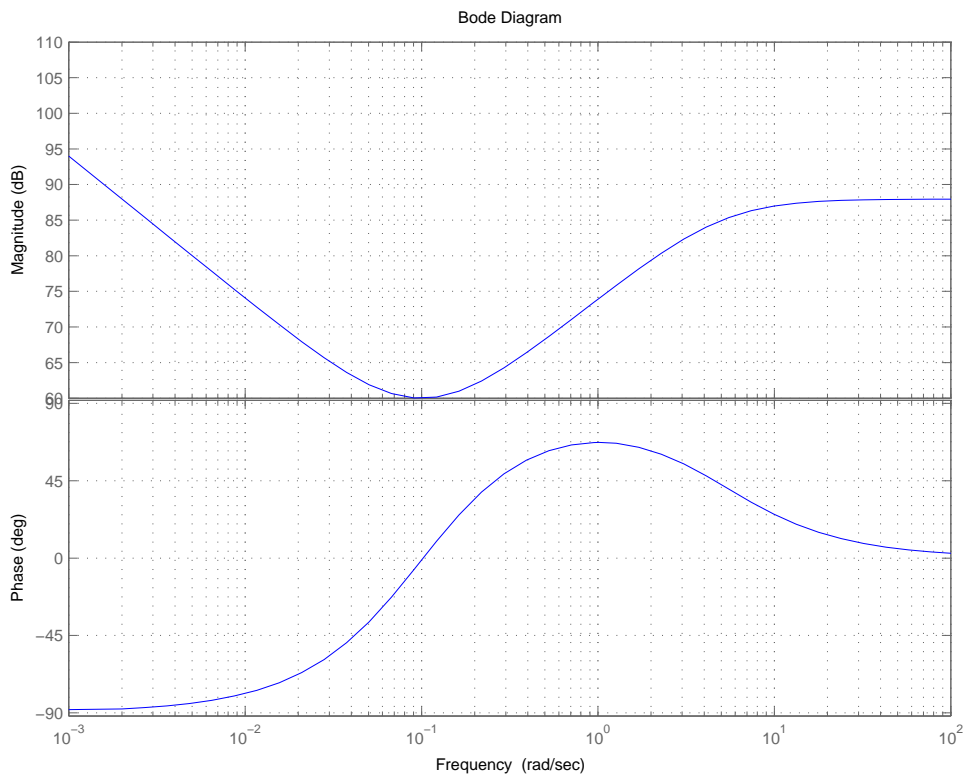


Figure 8: Diagrammi di Bode del controllore $C(s)$.

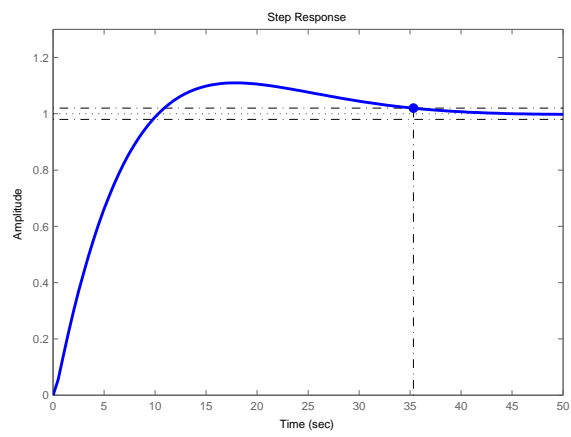


Figure 9: Risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione.