Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 23-11-2005

Si consideri il seguente sistema meccanico

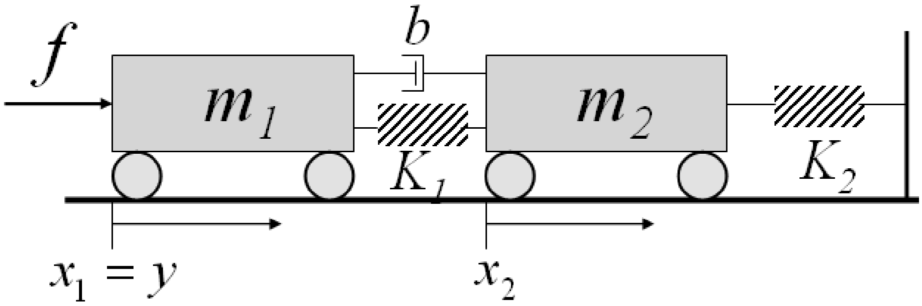

Figure 1: Sistema meccanico.

A Si derivino le equazioni dinamiche del sistema di figura 1.

B Si determini la funzione di trasferimento tra la forza f e l'uscita x_1.

C Si supponga che il sistema sia inizializzato con una perturbazione dalla condizione di riposo della massa m_2, mentre la massa m_1 è mantenuta immobile da un'opportuna forza f. Si descrivano le possibili evoluzioni del sistema e i valori corrispondenti della forza $f(t)$ necassaria per immobilizzare la massa m_1.

D Si scriva la trasformata $\bar{F}(s)$ di Laplace della $f(t)$ così trovata e dell'uscita $Y(s)$. Si descriva il risultato.

Soluzione

A Le equazioni dinamiche del sistema sono:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1(x_1 - x_2) = f \\ m_2\ddot{x}_2 + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_1(x_2 - x_1) + K_2 x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

B Essendo il sistema lineare, la funzione di trasferimento tra l'uscita $y = x_1$ e l'ingresso f si ottiene trasformando secondo Laplace entrambe le equazioni dinamiche. Sostituendo la $X_2(s)$ ottenuta dalla seconda equazione nella prima, la funzione di trasferimento cercata sarà:

$$X_1(s) = Y(s) = G(s)F(s) = \frac{m_2 s^2 + bs + K_1 + K_2}{m_1 m_2 s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + [m_1(K_1 + K_2) + K_1 m_2]s^2 + bK_2 s + K_1 K_2} F(s)$$

C Riprendendo le equazioni dinamiche (1) e ponendo $\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 = x_1 = 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} -b\dot{x}_2 - K_1 x_2 = f \\ m_2\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + (K_1 + K_2)x_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

La seconda equazione di (2) rappresenta la dinamica della massa m_2 in evoluzione libera con la massa m_1 vincolata dalla forza f. La dinamica in forma di stato può quindi essere rappresentata come segue:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_1+K_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

da cui l'evoluzione libera nel tempo:

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{At} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix}$$

I modi propri del sistema sono delle oscillazioni smorzate di pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m_2}}$ e smorzamento $\xi = \frac{b}{2\sqrt{m_2(K_1+K_2)}}$.

Per trovare i valori corrispondenti della forza $f(t)$ è sufficiente sostituire nella prima equazione di (2) i modi propri della massa m_2 come sopra calcolati.

D La trasformata di Laplace di $f(t)$, combinazione lineare dei modi propri della massa m_2, può essere calcolata a partire dal sistema di equazioni differenziali (2) tenendo conto delle condizioni iniziali non nulle $x_2(0)$ e $\dot{x}_2(0)$:

$$\begin{cases} \bar{F}(s) = -(bs + K_1)X_2(s) \\ (m_2 s^2 + bs + (K_1 + K_2))X_2(s) - (m_2 x_2(0)s + m_2\dot{x}_2(0) + bx_2(0)) = 0 \Rightarrow n(s)X_2(s) - X_{02}(s) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene subito la trasformata del segnale di ingresso:

$$\bar{F}(s) = -(bs + K_1)\frac{X_{02}(s)}{n(s)} = \frac{P_0(s)}{n(s)}$$

Per determinare la trasformata del segnale di uscita $X_1(s) = Y(s)$ è necessario applicare l'ingresso al sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$. Si deve innanzitutto notare che la dinamica inizialmente perturbata della massa m_2 eccita il sistema complessivo rendendo necessario il calcolo esplicito della funzione di trasferimento con le condizioni iniziali perturbate. Trasformando secondo Laplace il sistema originario (1) si ottiene:

$$\begin{cases} m_1 s^2 X_1 + bs(X_1 - X_2) + K_1(X_1 - X_2) - m_1\dot{x}_1(0) - m_1 s x_1(0) - b(x_1(0) - x_2(0)) = F(s) \\ m_2 s^2 X_2 + bs(X_2 - X_1) + K_1(X_2 - X_1) + K_2 X_2 - m_2\dot{x}_2(0) - m_2 s x_2(0) - b(x_2(0) - x_1(0)) = 0 \end{cases}$$

Ponendo $Y_{01}(s) = -m_1\dot{x}_1(0) - m_1 s x_1(0) - b(x_1(0) - x_2(0))$, $Y_{02}(s) = -m_2\dot{x}_2(0) - m_2 s x_2(0) - b(x_2(0) - x_1(0))$, $n(s) = m_2 s^2 + bs + (K_1 + K_2)$ e $d(s) = m_1 m_2 s^4 + b(m_1 + m_2)s^3 + [m_1(K_1 + K_2) + K_1 m_2]s^2 + bK_2 s + K_1 K_2$ si ha:

$$X_1(s) = \frac{n(s)}{d(s)}F(s) - \frac{bs + K_1}{d(s)}Y_{02}(s) - \frac{n(s)}{d(s)}Y_{01}(s) = G(s)F(s) + \frac{Y_0(s)}{d(s)}$$

dalla quale è adesso possibile ricavare la trasformata del segnale di uscita sostituendo il controllo $\bar{F}(s)$:

$$Y(s) = G(s)\bar{F}(s) + \frac{Y_0(s)}{d(s)} = \frac{n(s)}{d(s)}\frac{P_0(s)}{n(s)} + \frac{Y_0(s)}{d(s)} = \frac{P_0(s) + Y_0(s)}{d(s)}$$

Escludendo la soluzione banale $P_0(s) = Y_0(s) = 0$, esistono delle condizioni iniziali non nulle che permettono di cancellare sulla uscita i modi inizialmente eccitati mediante l'applicazione di un ben determinato segnale di ingresso, infatti con $P_0(s) = -Y_0(s)$ si ottiene $Y(s) = 0\,\forall t$. Si noti inoltre come il segnale di ingresso deve anche necessariamente avere la stessa dinamica del numeratore della $G(s)$. Per questo motivo gli zeri di una funzione di trasferimento $G(s)$ con numeratore $n(s)$ e denominatore $d(s)$ primi tra loro sono anche detti *zeri di trasmissione* o *zeri bloccanti* in quanto non permettono la "trasmissione", ovvero "bloccano", un segnale di ingresso verso l'uscita. Infine, si noti come l'esistenza di un segnale di ingresso in grado di bloccare alcuni modi del sistema dipende dalle particolari condizioni iniziali, essendo i polinomi $P_0(s)$ e $Y_0(s)$, in generale, di grado diverso.

La $\bar{F}(s)$ utilizzata in questa soluzione non è l'unica possibile. La condizione essenziale è che esistano degli zeri bloccanti nella funzione di trasferimento del sistema, in tal caso è infatti possibile generare un segnale di ingresso che, date opportune condizioni iniziali, renda l'uscita identicamente nulla. Tali zeri dovranno costituire il denominatore della trasformata del segnale di ingresso. Nel sistema meccanico in oggetto in cui la massa m_2 evolve a partire da condizioni iniziali non nulle, produrre un'uscita identicamente nulla corrisponde a mantenere la massa m_1 ferma e ciò è possibile applicando in ingresso una forza corrispondente alla dinamica della massa m_2.