Regolazione e Controllo (solo V.O.) — I Parte — 19 Aprile 2006

Numero di matricola						
	–	–	–	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$

A) Si consideri il pendolo rappresentato in figura 1. Con m si indica la massa del pendolo, il cui valore nominale vale $m = 10\ kg$, con $L = 2\ m$ la sua lunghezza, con $g = 9.81\ m/s^2$ l'accelerazione di gravità, con C la coppia di controllo applicata dall'esterno. Per piccole variazioni rispetto alla configurazione di equilibrio $\theta = \dot{\theta} = C = 0$, il modello linearizzato del pendolo è descritto dalla seguente equazione:

$$mL^2\ddot{\theta} - mgL\theta = C.$$

Sulla base del valore nominale della massa m è stato progettato un controllore in retroazione in grado di stabilizzare il pendolo in un intorno dell'equilibrio superiore. Il controllore realizzato ha funzione di trasferimento nominale $C(s) = k\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$, con $k = 300$, $\tau_1 = 0.2$ e $\tau_2 = 0.1$; lo schema della retroazione utilizzata è riportato in figura 1.
Nel caso in cui la massa m e la costante di guadagno k siano parametri incerti e possano variare all'interno degli intervalli $\left(9 - \frac{\alpha}{10}\right) \leq m \leq \left(11 + \frac{\alpha}{10}\right)$ e $\left(250 - \frac{\beta}{10}\right) \leq k \leq \left(350 + \frac{\beta}{10}\right)$, il controllore $C(s)$ è ancora in grado di stabilizzare il pendolo?

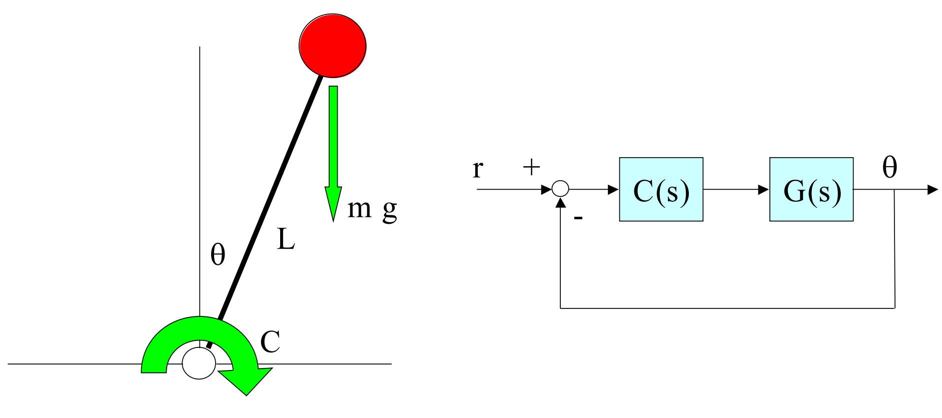

Figure 1: Sistema meccanico da controllare e retroazione utilizzata

B) Si consideri il sistema dinamico lineare descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+a)}{(s+c)(s+b)^3}$, con $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Si determini l'evoluzione temporale della risposta forzata del sistema, nel caso in cui esso sia soggetto ad un ingresso a gradino di ampiezza K generica.

Soluzione

A) La funzione di trasferimento che lega l'ingresso $C(s)$ e l'uscita $\Theta(s)$ vale:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{C(s)} = \frac{1}{mL^2s^2 - mgL}.$$

Utilizzando lo schema di retroazione mostrato in figura 1, con controllore $C(s) = k\frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}$, si ottiene la seguente funzione di trasferimento di anello chiuso:

$$G_c(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1)}{mL^2\tau_2 s^3 + mL^2 s^2 + (k\tau_1 - mgL\tau_2)s + (k - mgL)}.$$

Se la massa m e la costante di guadagno k assumono i rispettivi valori nominali, il controllore $C(s)$ è in grado di stabilizzare il sistema e i poli della funzione di trasferimento in anello chiuso sono in $s = -9.2098$ e in $s = -0.3951 \pm j1.6314$. Il luogo delle radici della funzione di trasferimento $C(s)G(s)$ in condizioni nominali è riportato in figura 2.
Per verificare se il controllore $C(s)$, progettato in condizioni nominali, è ancora in grado di stabilizzare il sistema per ciascuno dei valori che la massa m e la costante di guadagno k possono assumere, è possibile andare a studiare il segno della parte reale delle radici del polinomio a denominatore della $G_c(s)$ utilizzando il criterio di Routh. Il polinomio da studiare è il seguente

$$\phi(s) = mL^2\tau_2 s^3 + mL^2 s^2 + (k\tau_1 - mgL\tau_2)s + (k - mgL).$$

Imporre che tutti i coefficienti del polinomio $\phi(s)$ siano positivi costituisce solo una condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché le radici del polinomio siano tutte a parte reale negativa. Per studiare il segno della parte reale delle radici del polinomio è invece possibile utilizzare la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{cc} mL^2\tau_2 & k\tau_1 - mgL\tau_2 \\ mL^2 & k - mgL \\ k(\tau_1 - \tau_2) & 0 \\ k - mgL & 0 \end{array}$$

Affinché le radici del polinomio $\phi(s)$ siano tutte a parte reale negativa devono essere verificate entrambe le relazioni

$$\tau_1 - \tau_2 > 0,$$
$$k - mgL > 0.$$

In base ai valori di τ_1 e τ_2 la prima relazione risulta già verificata. Per quanto riguarda la seconda relazione, essa deve essere soddisfatta per ciascuno dei valori che m e k possono assumere. Il caso peggiore si presenta quando $(k - mgL)$ è minimo, cioè k è minimo e m è massimo; poiché anche in questo caso critico il termine $(k - mgL)$ si mantiene positivo, si può affermare che il polinomio $\phi(s)$ ammette tutte radici a parte reale negativa per qualsiasi valore che i parametri m e k possono assumere all'interno dei rispettivi intervalli di incertezza.
L'analisi poteva essere condotta anche utilizzando il criterio di Kharitonov, applicato al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento di anello chiuso. Per prima cosa, si indichino i quattro coefficienti del polinomio con i simboli $\phi_0 = mL^2\tau_2$, $\phi_1 = mL^2$, $\phi_2 = (k\tau_1 - mgL\tau_2)$, $\phi_3 = (k - mgL)$, e si descriva sinteticamente il polinomio in esame nella forma $\phi(s) : \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$. Ciascun coefficiente ϕ_i del denominatore di $G_c(s)$ varia, al variare di m, in un intervallo di valori ben definito $\phi_i^- \le \phi_i \le \phi_i^+$; nel caso $\alpha = \beta = 0$ gli intervalli di variazione dei quattro coefficienti sono:

$$\begin{array}{rcl} 3.6 & \le \phi_0 \le & 4.4 \\ 36 & \le \phi_1 \le & 44 \\ 28.418 & \le \phi_2 \le & 52.342 \\ 34.18 & \le \phi_3 \le & 173.42 \end{array}$$

Si definiscono a questo punto quattro polinomi ausiliari:

$$\begin{array}{rcccl} \phi_a(s) & = & \{\phi_0^+, \phi_1^+, \phi_2^-, \phi_3^-\} & = & 4.4s^3 + 44s^2 + 28.418s + 34.18 \\ \phi_b(s) & = & \{\phi_0^-, \phi_1^-, \phi_2^+, \phi_3^+\} & = & 3.6s^3 + 36s^2 + 52.342s + 173.42 \\ \phi_c(s) & = & \{\phi_0^+, \phi_1^-, \phi_2^-, \phi_3^+\} & = & 4.4s^3 + 36s^2 + 28.418s + 173.42 \\ \phi_d(s) & = & \{\phi_0^-, \phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-\} & = & 3.6s^3 + 44s^2 + 52.342s + 34.18 \end{array}$$

Le radici dei quattro polinomi hanno tutte parte reale negativa, come è possibile vedere utilizzando il criterio di Routh o, più semplicemente, trovandone numericamente i valori in Matlab. Questa è, per il criterio di Kharitonov, condizione necessaria e sufficiente per affermare che le radici del polinomio a denominatore della funzione di trasferimento di anello chiuso hanno parte reale negativa per tutti i valori che m e k possono assumere all'interno dei rispettivi intervalli di incertezza.

B) La risposta forzata del sistema, in presenza di una forzante a gradino del tipo $u(t) = kH(t)$ vale:

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = G(s)U(s) = \frac{k(s+a)}{s(s+c)(s+b)^3}.$$

Al fine di ottenere la risposta forzata nel dominio del tempo, si sviluppi la $Y(s)$ in fratti semplici e si calcolino le anti trasformate dei termini ricavati:

$$Y(s) = \frac{k(s+a)}{s(s+c)(s+b)^3} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+c} + \frac{\alpha_3}{s+b} + \frac{\alpha_4}{(s+b)^2} + \frac{\alpha_5}{(s+b)^3}.$$

Una volta ricavati i coefficienti incogniti α_i, la $y(t)$ può essere facilmente ottenuta mediante anti trasformazione, sulla base delle trasformate notevoli:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \alpha_1 H(t) + \alpha_2 e^{-ct} + \alpha_3 e^{-bt} + \alpha_4 t e^{-bt} + \alpha_5 \frac{t^2}{2} e^{-bt}.$$

Per il calcolo esplicito dei coefficienti α_i è possibile, ad esempio, utilizzare le formule seguenti:

$$\alpha_1 = [Y(s)s]_{s=0} = \frac{ka}{cb^3},$$

$$\alpha_2 = [Y(s)(s+c)]_{s=-c} = -\frac{k(a-c)}{c(b-c)^3},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[Y(s)(s+b)^3\right]_{s=-b} = -\frac{(-b^3+3ab^2-3abc+ac^2)k}{b^3(c-b)^3},$$

$$\alpha_4 = \frac{d}{ds}\left[Y(s)(s+b)^3\right]_{s=-b} = \frac{(-b^2+2ab-ac)k}{b^4+c^2b^2-2cb^3},$$

$$\alpha_5 = \left[Y(s)(s+b)^3\right]_{s=-b} = \frac{-k(a-b)}{b(c-b)}.$$

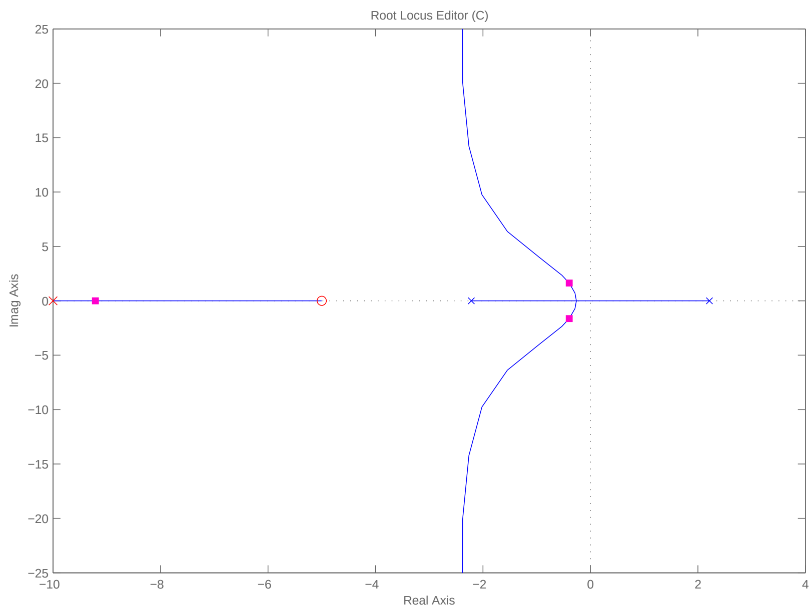

Figure 2: Esercizio A: luogo delle radici della funzione di trasferimento $C(s)G(s)$ in condizioni nominali ($m = 10\ kg$, $k = 300$)