Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici — 13-07-2006

Si consideri il modello dinamico semplificato di un reattore nucleare riportato in fig. 1-*Sinistra*.

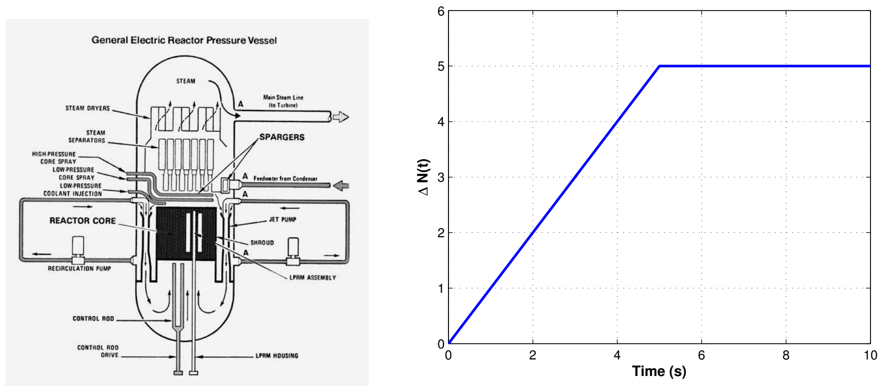

Figure 1: *Sinistra*: Schema di principio di un reattore nucleare. *Destra*: Riferimento $\Delta N(t)$ di variazione di densità di neutroni (quesito **C)**).

Nel caso in cui si considerino presenti due gruppi di precursori (isotopi radioattivi) di densità $c_1(t)$ e $c_2(t)$, la dinamica del reattore risulta

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{n}(t) & = & [\frac{\rho(t)-\beta}{l}]n(t) + \lambda_1 c_1(t) + \lambda_2 c_2(t) + q(t), \\ \dot{c}_1(t) & = & \frac{\beta_1}{l}n(t) - \lambda_1 c_1(t), \\ \dot{c}_2(t) & = & \frac{\beta_2}{l}n(t) - \lambda_2 c_2(t), \end{array}\right. \tag{1}$$

in cui $n(t)$ rappresenta la densità di neutroni, $l = 0.00002\,s$ è una costante detta tempo di generazione, $\rho(t)$ rappresenta un ingresso di controllo detto reattività, $q(t)$ è la variazione temporale di densità con cui vengono generate particelle eccitanti da una sorgente esterna che alimenta la reazione, $\lambda_1 = 1.4\ s^{-1}$ e $\lambda_2 = 3.87\ s^{-1}$ sono le costanti di ritardo dei due precursori, e $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 0.001078$ è un parametro adimensionale detto frazione dei precursori, dove si è posto $\beta_1 = 0.000896$ e $\beta_2 = 0.000182$.

Lo scopo è quello di controllare la densità di neutroni $n(t)$ agendo sul controllo $\rho(t)$ nota l'evoluzione temporale di $q(t)$.

A Si consideri inizialmente la reattività $\rho(t)$ come *parametro costante* $\bar{\rho}$ del sistema. Si calcoli il valore di tale parametro affinchè, a partire dallo stato iniziale $[n(t), c_1(t), c_2(t)]|_{t=0}^T = [0, 0, 0]^T$, un ingresso impulsivo unitario $q(t) = \delta(t)$ produca uno stato di equilibrio a regime $[n(t), c_1(t), c_2(t)]|_{t\to\infty}^T \neq [0, 0, 0]^T$. Si calcoli, se possibile, lo stato di equilibrio risultante (che corrisponde ad uno stato di reazione autosostenuta); (SUGGERIMENTO: si noti che, scelta la reattività $\rho(t)$ come parametro costante del sistema, la dinamica (1) del reattore *risulta lineare* nello stato e nell'ingresso $q(t)$)

B Supposte possibili variazioni di reattività $\rho(t)$, si linearizzi il sistema nell'intorno dello stato di equilibrio ricavato al punto **A)** e si calcolino le funzioni di trasferimento $G_\rho(s) = \frac{\tilde{n}(s)}{\tilde{\rho}(s)}$ e $G_q(s) = \frac{\tilde{n}(s)}{\tilde{q}(s)}$;

C Dati i risultati ricavati al punto precedente, progettare un controllore in retroazione $C(s)$ che, sfruttando la misura della variazione di densità di neutroni $\tilde{n}(t)$ e controllando $\rho(t)$, garantisca

C1 l'inseguimento a regime con errore nullo ad un riferimento di variazione di densità di neutroni $\Delta N(t) = t\,u(t) + (5-t)\,u(t-5)$, in cui $u(t)$ rappresenta la funzione a gradino unitario (il segnale $\Delta N(t)$ è riportato in figura 1-*Destra*). (SUGGERIMENTO: dato un segnale tempo–continuo $a(t)$,la L-trasformata del segnale traslato di τ secondi nel dominio del tempo risulta $L\{a(t-\tau)\} = A(s)e^{-s\tau}$, dove si è posto $A(s) = L\{a(t)\}$);

C2 sovraelongazione percentuale massima $S \leq 10\%$ e tempo di assestamento $T_{ass} \leq 4\,s$;

C3 una attenuazione di 10^3 di disturbi sinusoidali che agiscono a pulsazioni $\omega \geq 3.5\,10^3\,rad/s$ sulla misura della variazione di densità di neutroni.

OPZIONALE Si determinino i modi propri del segnale di controllo $\rho(t)$ in uscita al controllore in retroazione $C(s)$ ottenuto al punto **C)**.

Soluzione

A Al fine di ottenere uno stato di equilibrio diverso da zero con un ingresso impulsivo, si deve calcolare il valore costante $\bar{\rho}$ che determini una funzione di trasferimento $G_q(s) = \frac{n(s)}{q(s)}$ stabile e con un polo nell'origine, quindi

$$G_q(s) = G'(s)\frac{1}{s}$$

con $G'(s)$ asintoticamente stabile. A tal fine si osservi che la dinamica del sistema (1) in questo caso risulta lineare nella forma

$$\begin{cases} \dot{n}(t) &= [\frac{\bar{\rho}-\beta}{l}]n(t) + \lambda_1 c_1(t) + \lambda_2 c_2(t) + q(t), \\ \dot{c}_1(t) &= \frac{\beta_1}{l}n(t) - \lambda_1 c_1(t), \\ \dot{c}_2(t) &= \frac{\beta_2}{l}n(t) - \lambda_2 c_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

L-trasformando le tre equazioni dinamiche tenendo conto che lo stato iniziale è nullo (quindi, $L\{\dot{a}(t)\} = s\,a(s)$ per un qualsiasi segnale $a(t)$ nel dominio del tempo con $a(0) = 0$), dopo alcuni passaggi algebrici, si ottiene la funzione di trasferimento

$$G_q(s) = \frac{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s[s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\beta}{l})s + \lambda_1\lambda_2 + \frac{\beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_1}{l}]}$$

avendo scelto $\bar{\rho} = 0$ poichè risulta l'unico valore costante che garantisce uno stato a regime costante non nullo. Dato che si tratta di ingresso impulsivo (quindi $L\{\delta(t)\} = 1$), il punto di equilibrio risultante si ottiene applicando il teorema del valor finale alla $G_q(s)$ ottenendo

$$n(\infty) = \lim_{s\to 0^+} sG_q(s) = \frac{l\lambda_1\lambda_2}{l\lambda_1\lambda_2 + \beta_1\lambda_2 + \beta_2\lambda_1} = 0.0283,$$

e quindi $c_1(\infty) = \frac{\beta_1}{l\lambda_1}n(\infty) = 0.9056$ e $c_2(\infty) = \frac{\beta_2}{l\lambda_2}n(\infty) = 0.0665$. Il punto di equilibrio desiderato risulta quindi

$$X = [\bar{n}, \bar{c}_1, \bar{c}_2] = [0.0283, 0.9056, 0.0665]^T.$$

B Il sistema linearizzato attorno all'equilibrio trovato al punto **A)** risulta

$$\begin{cases} \dot{\tilde{n}}(t) &= \left(\frac{\bar{\rho}-\beta}{l}\right)\tilde{n} + \lambda_1\tilde{c}_1(t) + \lambda_2\tilde{c}_2(t) + \tilde{q}(t) + \frac{\bar{n}}{l}\tilde{\rho}, \\ \dot{\tilde{c}}_1(t) &= \frac{\beta_1}{l}\tilde{n}(t) - \lambda_1\tilde{c}_1(t), \\ \dot{\tilde{c}}_2(t) &= \frac{\beta_2}{l}\tilde{n}(t) - \lambda_2\tilde{c}_2(t), \end{cases} \quad (3)$$

dove, in particolare, $\tilde{q} = q(t)$ poiché a regime l'impulso si è esaurito. Le funzioni di trasferimento $G_q(s)$ e $G_\rho(s)$ risultano

$$G_q(s) = \frac{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s[s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\beta}{l})s + \lambda_1\lambda_2 + \frac{\beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_1}{l}]} = \frac{(s+3.87)(s+1.4)}{s(s+55.7334)(s+3.4366)}$$

$$G_\rho(s) = \frac{\bar{n}}{l}G_q(s) = \frac{\bar{n}}{l}\frac{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s[s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\beta}{l})s + \lambda_1\lambda_2 + \frac{\beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_1}{l}]} = 1415\frac{(s+3.87)(s+1.4)}{s(s+55.7334)(s+3.4366)}.$$

C Il legame ingresso/uscita risulta espresso dalla seguente equazione

$$\tilde{n}(s) = G_\rho(s)\tilde{\rho}(s) + G_q(s)\tilde{q}(s).$$

C1 Si consideri in particolare la funzione di trasferimento $G_\rho(s)$. Essendo l'impianto ad anello aperto asintoticamente stabile, per progettare il controllore è possibile operare direttamente sui diagrammi di Bode (Fig. 2).

Si fa riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t}\hat{C}(s), \quad con \quad \hat{C}(0) = 1 \;,$$

Si osservi che la funzione di trasferimento considerata è di tipo 1, mentre il profilo assegnato ΔN presenta un andamento di tipo lineare. L'inseguimento con errore nullo del contributo costante è

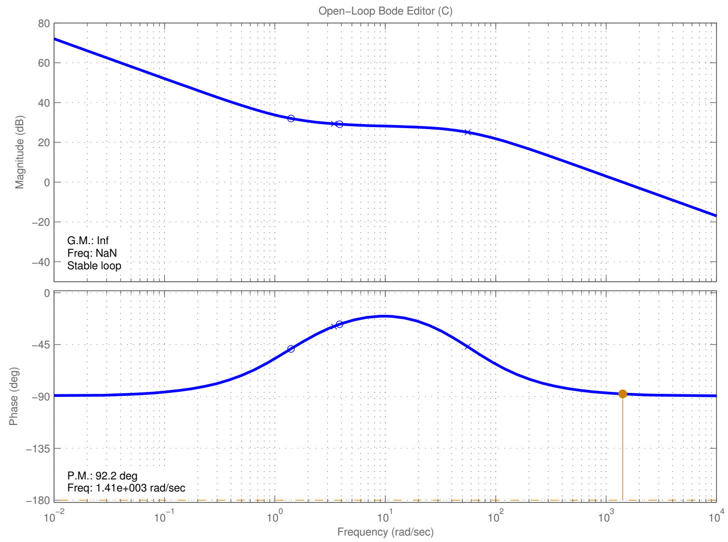

Figure 2: Diagrammi di Bode del sistema in anello aperto.

già garantito ma occorre un ulteriore polo nell'origine per annullare l'errore di inseguimento alla rampa. Poniamo in tal caso $t = 1$ ottenendo una struttura del controllore del tipo $C(s) = \frac{1}{s}\hat{C}(s)$. Con tale compensazione si ottiene il diagramma di Bode riportato in Fig. 3. Si osservi che il sistema così controllato è stabile e quindi sono soddisfatte le ipotesi di applicabilità del teorema del valore finale.

C2 Questa specifica richiede che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti pari a 0.8371 (come si ricava dalla espressione della sovraelongazione dei sistemi del secondo ordine $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 84^o$. Tale specifica non risulta attualmente rispettata avendo il sistema un margine di fase di circa 62.7^o (Fig. 3). Si può utilizzare un'opportuna azione anticipatrice ad esempio ponendo un zero in -0.862. Per soddisfare la specifica sul tempo di assestamento, l'approssimazione a due poli dominanti impone che la pulsazione naturale dei due poli debba essere $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 3.5838\, rad/sec$. In particolare occorre che il diagramma delle ampiezze di $C(\jmath\omega)G(\jmath\omega)$ intersechi l'asse a $0db$ a pulsazioni superiori a $0.8960\, rad/sec$. Tale condizione risulta attualmente ampiamente rispettata essendo la pulsazione di tagli approssimativamente pari a $1640\, rad/sec$ (Fig. 4).

C3 Per soddisfare la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza si deve verificare che $|C(s)G(s)| < 10^{-3}|1 + C(s)G(s)|$ nelle pulsazioni di interesse. Ciò equivale approssimativamente a chiedere che $|C(\jmath\omega)G(\jmath\omega)||_{db} \leq -60db$, $\forall\omega > 3.5\, 10^3 rad/s$. Tale specifica è illustrata in Fig. 4. Inserendo nel controllore un polo ad alta frequenza, ad es. in $-4.35\, rad/s$, si ottiene il diagramma di Bode riportato in Fig. 5 in cui si nota che la specifica risulta rispettata.

Si osservi però che il margine di fase risulta compromesso (37.6^0). È sufficiente ridurre il guadagno (ad esempio porlo pari a 0.104), in virtù dell'alta pulsazione di taglio, per verificare tutte le specifiche (Fig. 6). Il controllore risulta quindi

$$C(s) = 0.104\frac{(1 + 1.6s)}{s(1 + 0.23s)}$$

A verifica della bontà del progetto si riporta la risposta al gradino del sistema in Fig. 7.

OPZIONALE Calcolando la funzione di trasferimento $K(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)G_\rho(s)}$ che lega il segnale di riferimento al segnale di controllo si nota che essa presenta due poli complessi coniugati e tre poli reali

$p = a \pm j\, b = -28.9393 \pm 17.3352\, j$ $p_1 = -3.8504$, $p_2 = -0.9904$, $p_3 = -0.7985$.

Di conseguenza i modi propri si presentano nella forma $c_i\, e^{(p_i t)}|_{i=1..3}$ e $c\, e^{(at)} \sin(b\, t + \phi)$

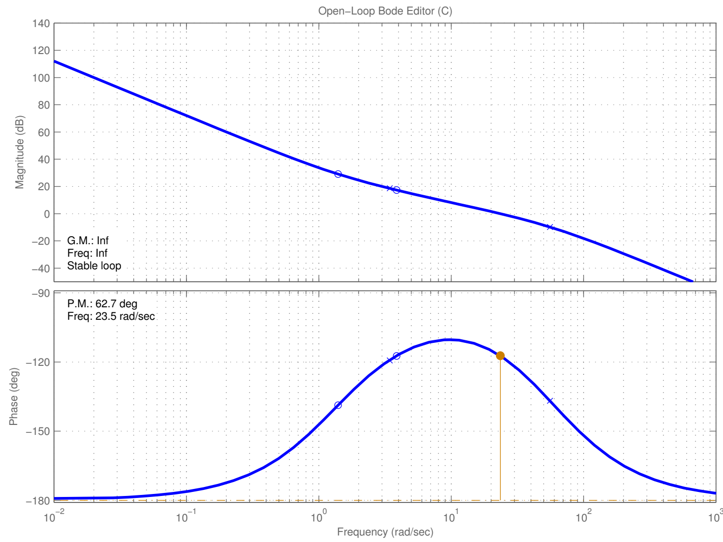

Figure 3: Diagrammi di Bode ottenuti con il controllore $C(s) = \frac{1}{s}$.

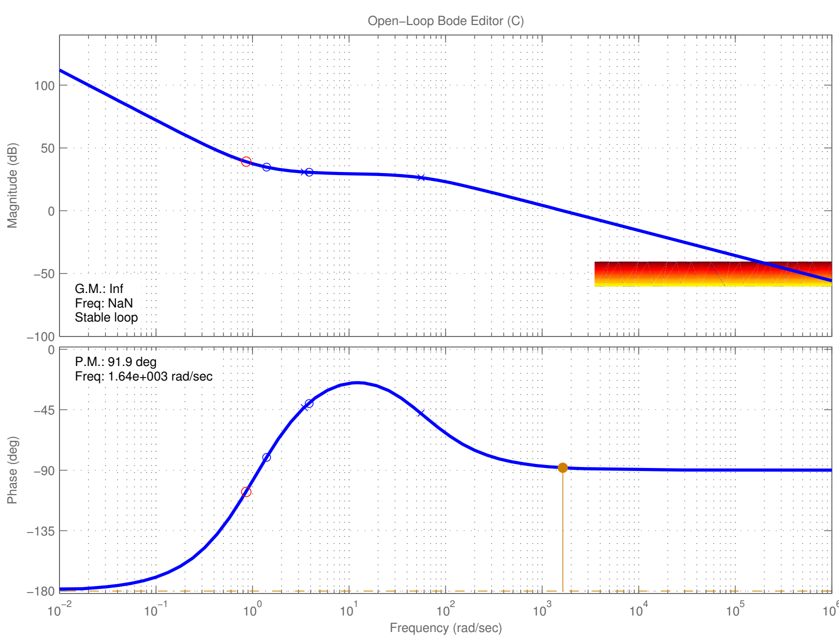

Figure 4: Diagramma di Bode del sistema con il vincolo sulla reiezione ai disturbi di misura e il controlore $C(s) = \frac{1+1.6s}{s}$

.

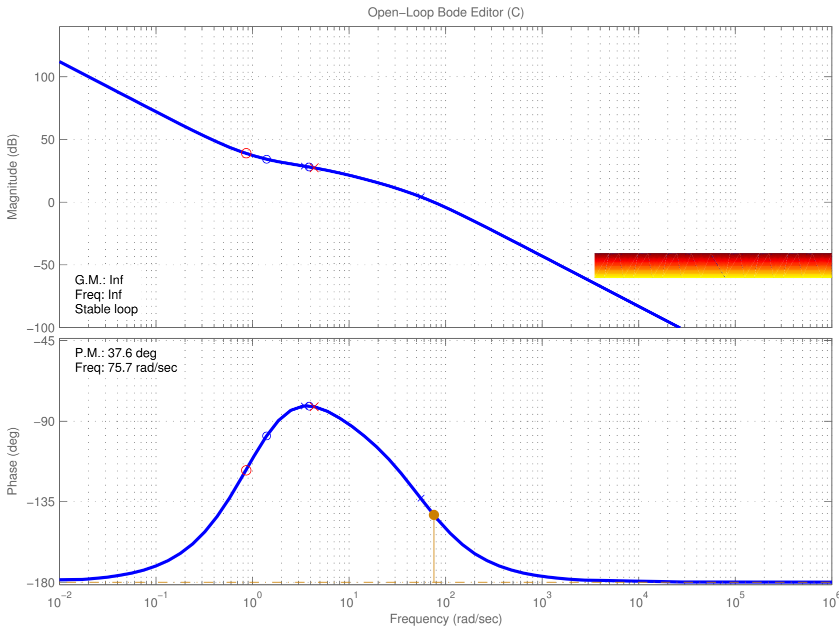

Figure 5: Diagrammi di Bode relativi al sistema con la compensazione del disturbo di misura.

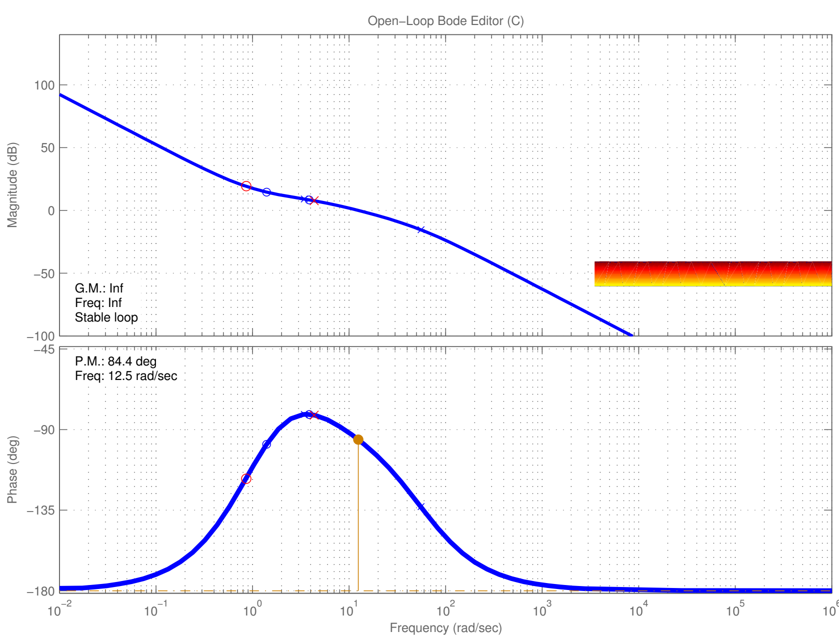

Figure 6: Diagrammi di Bode relativi al sistema con la compensazione del disturbo di misura e ripristino margine di fase.

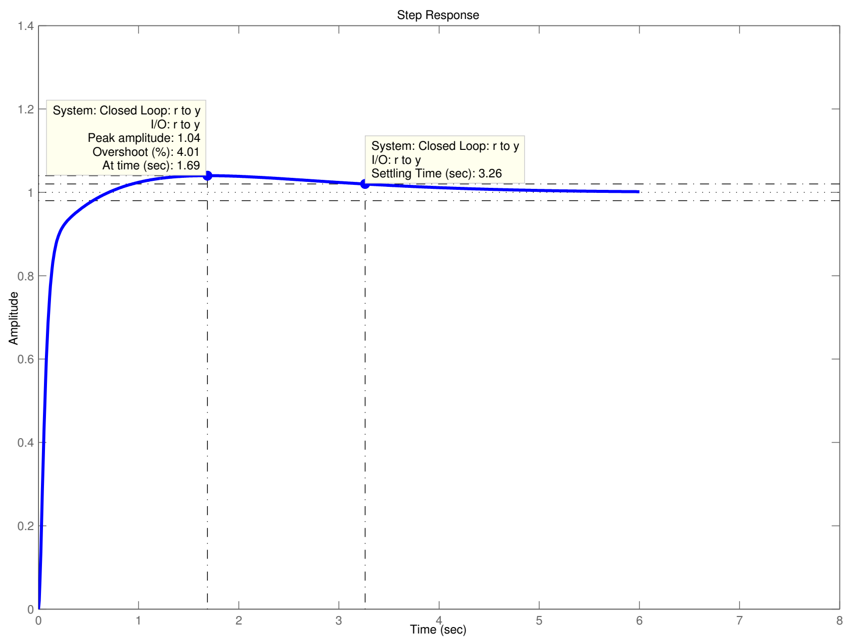

Figure 7: Risposta al gradino del sistema.