

Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici — 21 Novembre 2006

Numero di matricola

-	-	-	-	-	-
---	---	---	---	---	---

Si consideri la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s + 4}{s^3 + s^2 + 20s + 78}$$

- A) Discutere la stabilità della funzione di trasferimento ed indicarne i modi propri. Tracciare manualmente i diagrammi di Bode asintotici di ampiezza e fase ed il luogo delle radici della funzione di trasferimento $G(s)$.
- B) Studiare mediante il criterio di Nyquist la possibilità di controllare il sistema con una retroazione costante della uscita.
- C) Si consideri per la funzione di trasferimento assegnata $G(s)$ il progetto di un controllore che soddisfi le seguenti specifiche:
 - C1) il sistema raggiunga a regime esattamente il riferimento a gradino assegnato.
 - C2) la sovralongazione deve essere al massimo del 12% e il tempo di assestamento inferiore a 0.2 s.
 - C2) ipotizzando che il trasduttore di misura sia affetto da rumore sinusoidale per frequenze superiori a 1600 Hz, si cerchi di attenuare tali disturbi di un fattore pari a 10^3 .

Si descriva esplicitamente la procedura di progetto del controllore, commentando i passaggi effettuati durante le varie fasi di progetto; si corredi la trattazione con i diagrammi di Bode e/o dei luoghi delle radici utilizzati e si riporti l'espressione analitica del controllore ricavato.

Soluzione

- A) La funzione di trasferimento $G(s)$ presenta uno zero $z_0 = -4$ e tre poli di cui due complessi coniugati a parte reale positiva ($p_1 = \sigma_p + j\omega_p = 1 + 5j$ e $p_1^* = \sigma_p - j\omega_p = 1 - 5j$) e uno reale negativo ($p_2 = -3$).

Dalla posizione dei poli della $G(s)$ è facile dedurre l'instabilità. In particolare i modi della $G(s)$ sono:

- un modo esponenziale semplice $e^{p_2 t} = e^{-3t}$, convergente a zero;
- funzioni oscillanti $e^{\sigma_p t} \cos(\omega_p t) = e^t \cos(5t)$ e $e^{\sigma_p t} \sin(\omega_p t) = e^t \sin(5t)$ divergenti.

I diagrammi di Bode asintotici della funzione di trasferimento $G(s)$ di ampiezza e fase sono riportati in fig.1. Il luogo delle radici della $G(s)$ (nel caso di $K > 0$) è riportato in fig.2.

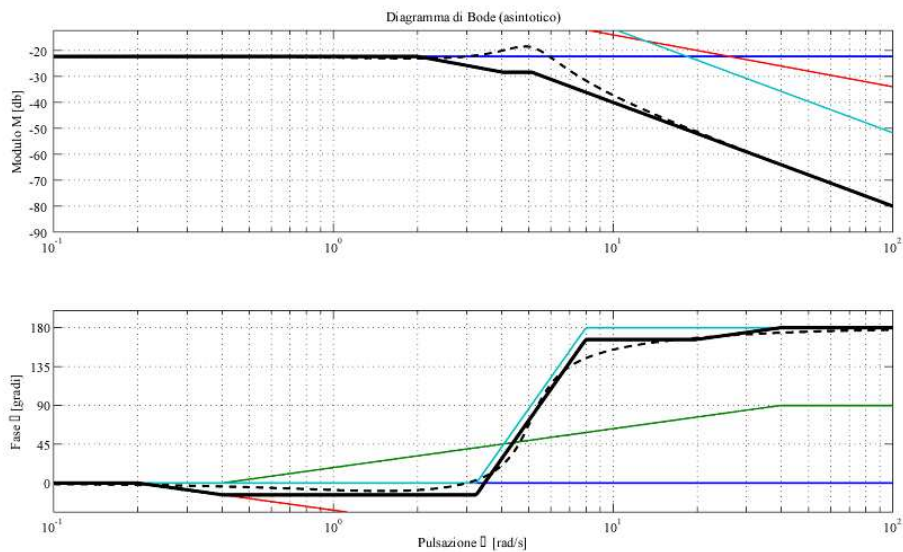


Figure 1: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase asintotici e reali della funzione di trasferimento ad anello aperto $G(s)$.

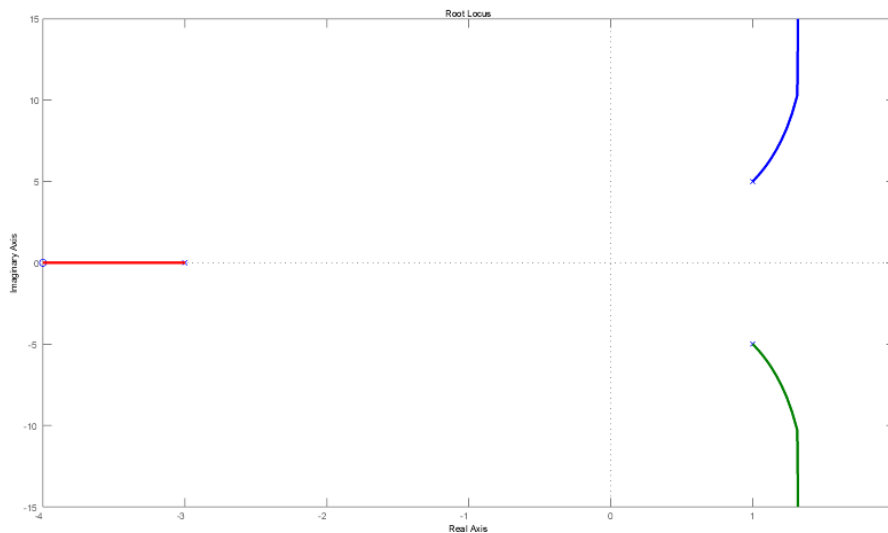


Figure 2: Luogo delle radici della funzione $G(s)$.

• **Alcune proprietà del luogo:** sono $n - m = 2$ i rami del luogo delle radici che tendono a infinito e vi tendono secondo altrettante direzioni asintotiche che formano con l'asse reale positivo angoli pari a

$$\gamma = \frac{\pi(2\nu + 1)}{n - m}, \quad r = 0 \dots n - m - 1$$

ovvero

$$\gamma_0 = \pi/2, \quad \gamma_1 = 3\pi/2.$$

Gli asintoti sono individuati da semirette di un fascio centrato in un punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum_1^n p_i - \sum_1^m z_i}{n - m} = \frac{1 + 1 - 3 + 4}{2} = 1.5.$$

B) Il diagramma polare della f.d.t. parte da un punto dell'asse reale pari a $G(0) = 4/78$ e termina nella origine con direzione asintotica pari a π , corrispondentemente alla differenza poli zeri pari a due. La fase (per ω positivi) è prevalentemente positiva, anche se il diagramma di Bode evidenzia che

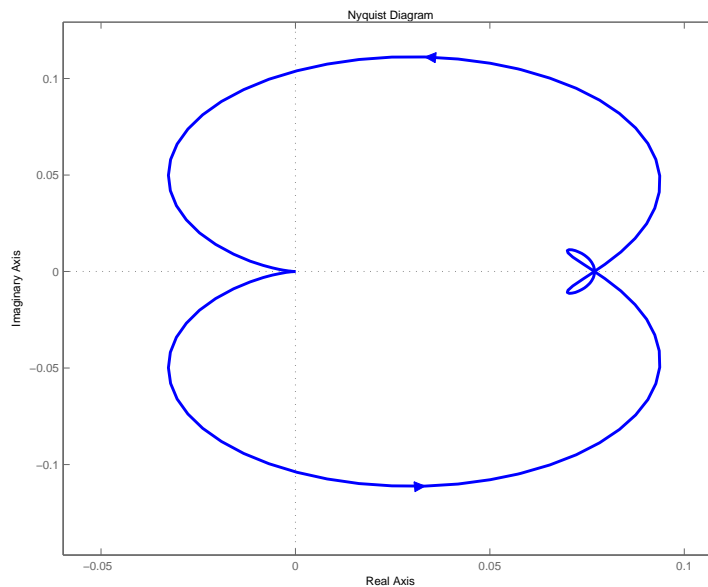


Figure 3: Diagrammi di Nyquist per la funzione di trasferimento $G(s)$.

nella regione in bassa frequenza si ha un piccolo ritardo di fase. Il criterio di Nyquist applicato al diagramma polare indica la impossibilità di stabilizzare con k positivo (nessun circondamento) come riportato in fig.4 a sinistra. Si osservi che anche scegliendo k negativi (diagramma polare a destra in fig.4) si ha un solo circondamento positivo, quindi il sistema resta instabile per qualsiasi valore di k .

C) Consideriamo ora il progetto di un controllore in grado di garantire le specifiche statiche e dinamiche richieste. Ci si riferisce ad un sistema a blocchi in retroazione negativa. Essendo l'impianto ad anello aperto instabile per progettare il controllore si può utilizzare la tecnica del controllo in cascata, rappresentata schematicamente in figura 5, applicando un doppio anello di retroazione.

Il controllore $C_1(s)$ stabilizzante può essere progettato partendo dal luogo delle radici di fig.2. Per stabilizzare la $G(s)$ è sufficiente attirare il luogo nel semipiano a parte reale negativa con uno zero reale negativo, posto ad esempio in -5 e aumentare in modo opportuno il guadagno. Infine è necessario rendere il controllore stabilizzante causale introducendo un polo ad esempio in -20 . In particolare utilizzando come controllore $C_1(s) = 300 \frac{1+0.2s}{1+0.05s}$ si ottiene la seguente funzione ad anello chiuso:

$$G_{c1} = \frac{C_1(s)G(s)}{1 + C_1(s)G(s)} = 1200 \frac{(s + 4)(s + 5)}{(s + 6.283)(s + 3.675)(s^2 + 11.04s + 1107)}. \quad (1)$$

Si ottengono in questo caso i diagrammi di Bode e il luogo delle radici riportati in 6.

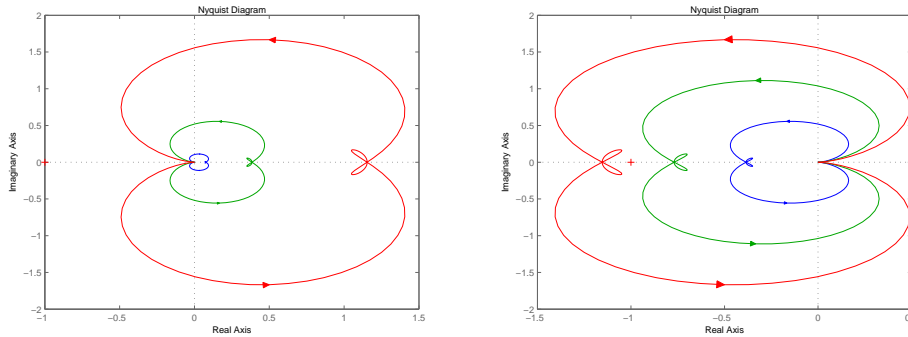


Figure 4: Diagrammi di Nyquist per la funzione di trasferimento $kG(s)$ al variare di k positivi (sinistra) e k negativi (destra).

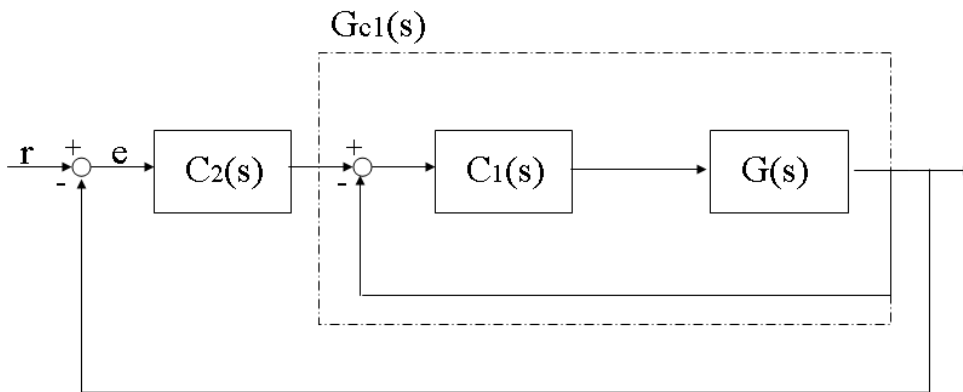


Figure 5: Diagramma a blocchi e controllo in cascata.

Il secondo controllore $C_2(s)$ viene progettato sulla funzione di trasferimento $G_{c1}(s)$ stabile. Osservando che la fdt $G_{c1}(s)$ non ha poli nell'origine, facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C_2(s) = \frac{K_2}{s^t} \hat{C}_2(s), \quad \text{con } \hat{C}_2(0) = 1,$$

si considera ora la scelta del tipo t e della costante di guadagno K_2 del controllore. Per rendere nullo l'errore a regime qualunque sia il valore assegnato del riferimento è sufficiente introdurre un polo nell'origine nel controllore ($t = 1$). La tecnica statica è soddisfatta per qualsiasi K_2 . Poniamo ad esempio $K_2 = 1$.

La specifica sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento richiede che il sistema in anello chiuso sia approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti pari a 0.56 (come si ricava dalla espressione della sovraelongazione dei sistemi di secondo ordine $s = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo significa che si ammette un margine di fase $\phi_M \approx 56^\circ$. Tale specifica risulta ampiamente rispettata (fig.7) con $PM=90^\circ$. La specifica sul tempo di assestamento per il caso di sistema in anello chiuso a due poli dominanti indica che la pulsazione naturale dei due poli deve essere $\omega_N \geq 3/\delta T_a \approx 27 \text{ rad/sec}$. Questa specifica in particolare si riflette nel chiedere che il diagramma delle ampiezze di $C(j\omega)G(j\omega)$ intersechi l'asse a 0 db a pulsazioni superiori a 27 rad/sec .

Tale specifica non è rispettata avendo attualmente una pulsazione di taglio di 0.957 rad/sec (fig.7). Per migliorare la pulsazione di taglio si può agire aumentando il guadagno del controllore ottenendo tuttavia valori ancora insufficienti e una drastica riduzione del margine di fase fino all'instabilità. Risulta allora conveniente utilizzare una doppia azione anticipatrice. Ponendo ad esempio due zeri complessi coniugati, entrambi in $-15 \pm 20j$ e aumentando il guadagno del controllore, ponendo $K_2 = 100$ si ottengono i diagrammi di Bode riportati fig.8. In tal caso si hanno un margine di fase di 84.8° e una pulsazione di taglio di 196 rad/sec e quindi entrambe le precedenti specifiche risultano rispettate.

Occorre imporre infine la specifica di reiezione dei disturbi in alta frequenza, ovvero che sia $|C_2(s)G_{c1}(s)| < 10^{-3}|1 + C_2(s)G_{c1}(s)|$ nelle pulsazioni di interesse. Ciò equivale approssimativa-

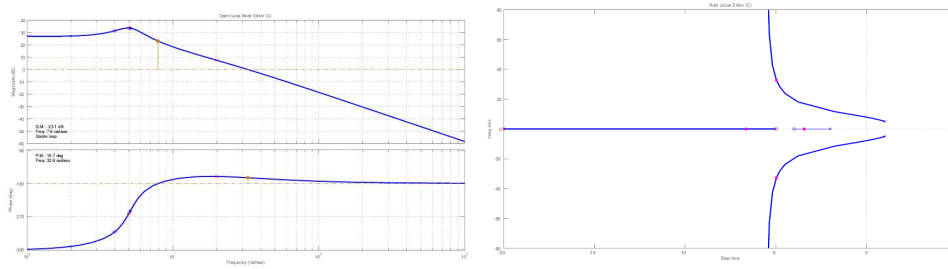


Figure 6: Diagrammi di Bode di ampiezza e fase (sinistra) e luogo delle radici (destra) della $G(s)$ stabilizzata con $C_1(s) = 300 \frac{1+0.2s}{1+0.05s}$.

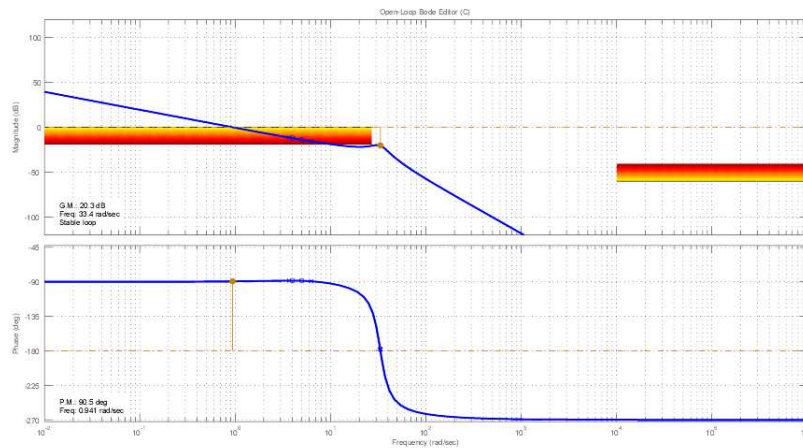


Figure 7: Diagramma di Bode del sistema dopo la compensazione $C_2(s) = \frac{1}{s}$

mente a chiedere che sia $|C_2(j\omega)G_{c1}(j\omega)|_{db} \leq -60db, \forall \omega > 2\pi \cdot 1600 \approx 10053rad/s$. Si garantisce questa specifica inserendo nel compensatore due poli ad alta frequenza, ad es. in -1000 , ottenendo il diagramma di Bode riportato in fig.9.

Il controllore risultante è dato da

$$C_2(s) = 100 \frac{(1 + 0.048s + 0.016s^2)}{s(1 + 0.001s)^2} = 160000 \frac{(s^2 + 30s + 625)}{s(s + 1000)^2}.$$

A verifica finale del progetto del controllore, riportiamo la risposta al gradino del sistema in anello chiuso in figura 10.

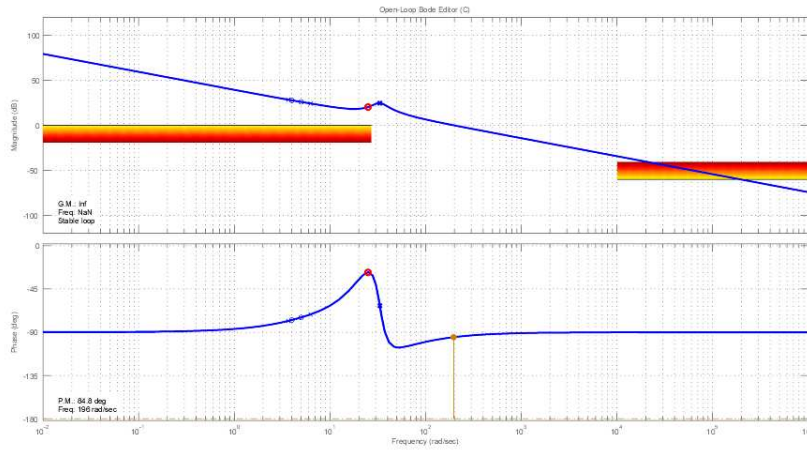


Figure 8: Diagramma di Bode del sistema dopo la compensazione $C_2(s) = 100 \frac{(1+0.048s+0.016s^2)}{s}$

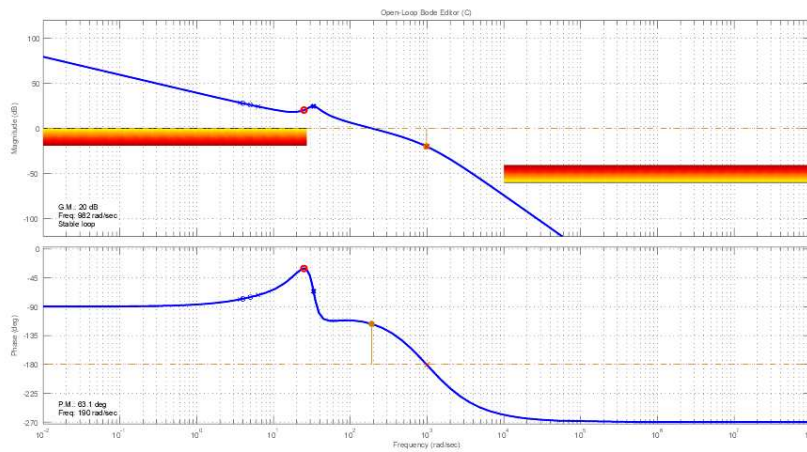


Figure 9: Diagrammi di Bode relativi al sistema con la compensazione del disturbo di misura.

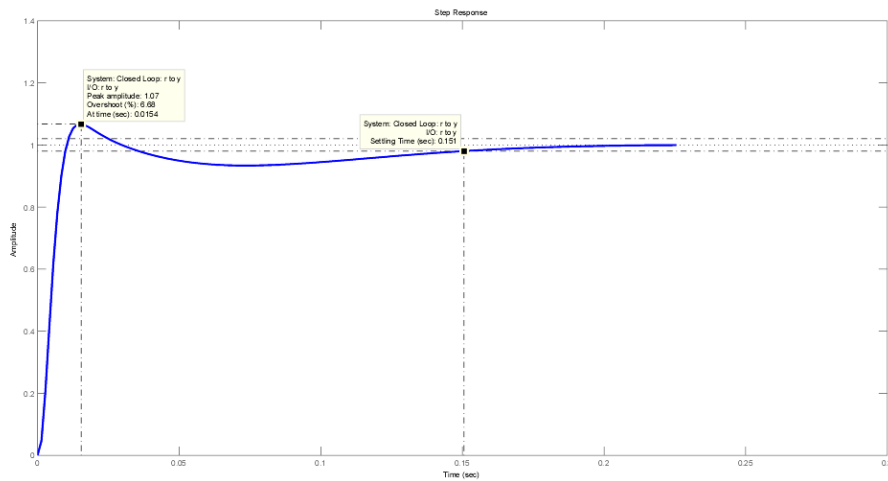


Figure 10: Risposta al gradino del sistema chiuso in retroazione.