Esercitazione Scritta di Controlli Automatici — 21-11-2006

Si consideri il seguente sistema non lineare tempo invariante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + 3x_4\left(x_3 + x_4\right) + u\left(1 + x_1^2\right) \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 - 10x_2 + 5x_3^2 + x_1 x_5 + u^2 \\ \dot{x}_3 &= x_1\left(1 + x_2\right) + x_2 - x_3 + x_4\left(x_3^2 + 1\right) + x_5 + 10u \\ \dot{x}_4 &= x_2 + 2x_4 + u \\ \dot{x}_5 &= x_1 x_4 + x_2 - 5x_5 \end{cases}$$

$$y = x_1 + 7x_2 + x_4,$$

dove $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$ è il vettore di stato, u l'ingresso di controllo e y l'uscita misurata.

A Si linearizzi il sistema nell'intorno dell'equilibrio nell'origine con ingresso nominale nullo;

B Si studi la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema;

C Si porti il sistema in forma canonica (o di Kalman) e se ne studi la stabilizzabilità e la detettabilità. Si riporti esplicitamente il sottosistema raggiungibile e osservabile;

D Si progetti un compensatore basato sul regolatore che sia in grado di stabilizzare asintoticamente il sistema nell'equilibrio nell'origine.

Soluzione

A Linearizziamo il sistema nell'intorno dell'origine con controllo nullo ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $u = 0$). Il sistema linearizzato risulta essere:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + bu \\ y &= c\mathbf{x}\end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

B Calcolando la matrice di raggiungibilità ($R = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b & A^4b \end{bmatrix}$) si ottiene:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -8 & 11 & -6 & 15 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che risulta avere rango 3. Il sistema non è quindi completamente raggiungibile dal controllo u.

Per ciò che concerne l'osservabilità del sistema si ha:

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ cA^3 \\ cA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -68 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 683 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -6825 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 68259 & 0 & 16 & 0 \end{bmatrix},$$

che risulta avere rango 3. Il sistema non è quindi completamente osservabile dall'uscita y.

C Allo scopo di portare il sistema in forma canonica, consideriamo i sottospazi di raggiungibilità e di inosservabilità. Dalla matrice di raggiungibilità si ha che il sottospazio di raggiungibilità può essere descritto come segue:

$$\mathcal{R} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

mentre il sottospazio di inosservabilità:

$$\bar{\mathcal{O}} = \ker(O) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Si osserva che

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con $\alpha = \frac{2}{55}$, $\beta = \frac{-3}{55}$ e $\gamma = \frac{1}{55}$; mentre $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ non può essere prodotto per combinazioni lineari non banali dei vettori di base di $\mathcal{R}$. Pertanto la loro intersezione $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{O}}$ può essere descritta da:

$$\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{O}} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

Quindi la base di $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{O}}$ è data da:

$$T_{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Come complemento di $T_{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}}$ ad una base di $\mathcal{R}$ (base $T_{\mathcal{R}\mathcal{O}}$), scegliamo ad esempio i vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

poiché, come è facile verificare, essi appartengono a $\mathcal{R}$ e sono linearmente indipendenti da $T_{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}}$. Prendiamo, inoltre

$$T_{\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{O}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

perché tale vettore è in $\bar{\mathcal{O}}$, non appartiene certamente a $\mathcal{R}$ ed è per costruzione linearmente indipendente dai precedenti.

Rimane da definire $T_{\bar{\mathcal{R}}\mathcal{O}}$ per completare la base

$$\left[\begin{array}{c|c|c} T_{\mathcal{R}\mathcal{O}} & T_{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}} & T_{\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{O}}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

per l'intero spazio $\mathbb{R}^5$. Una possibile (ovvia) scelta è

$$T_{\bar{\mathcal{R}}\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La base completa è dunque:

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c|c} T_{\mathcal{R}\mathcal{O}} & T_{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}} & T_{\bar{\mathcal{R}}\mathcal{O}} & T_{\bar{\mathcal{R}}\bar{\mathcal{O}}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Applicando questa matrice di trasformazione si porta il sistema in forma canonica (o di Kalman):

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right], \quad \hat{b} = T^{-1}b = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 10 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{c} = cT = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right].$$

Da cui si vede che il sistema raggiungibile e osservabile è dato da:

$$A_{\mathcal{R}\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_{\mathcal{R}\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_{\mathcal{R}\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale sistema è instabile avendo autovalori 1 e 2, mentre tutti gli altri autovalori (relativi ai sottosistemi non raggiungibili o non osservabili) sono reali negativi: -1, -10 e -5. Quindi il sistema risulta instabile ma stabilizzabile e detettabile. In particolare, il sistema raggiungibile e osservabile, è l'unico a partecipare al rapporto ingresso-uscita, quindi

$$G(s) = c\,(sI - A)\,b = c_{\mathcal{RO}}\,(sI - A_{\mathcal{RO}})^{-1}\,b_{\mathcal{RO}} = \frac{2s-3}{(s-1)\,(s-2)}.$$

D Progettiamo il compensatore basato su regolatore direttamente sul sottosistema raggiungibile e osservabile. Allochiamo, mediante una retroazione statica degli stati $K_{\mathcal{RO}}$, i poli di $A_{\mathcal{RO}} - b_{\mathcal{RO}}K_{\mathcal{RO}}$ in $p = \begin{bmatrix}-15 & -20\end{bmatrix}$. Utilizzando il comando Matlab `Kro = place(Aro,bro,p)` è possibile calcolare la matrice dei guadagni $K_{\mathcal{RO}}$. Si ottiene:

$$K_{\mathcal{RO}} = \begin{bmatrix}-336 & 374\end{bmatrix}.$$

Si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato. La matrice $L_{\mathcal{RO}}$ di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A_{\mathcal{RO}} - L_{\mathcal{RO}}c_{\mathcal{RO}}$ abbia autovalori $q = 2p$. Sempre impiegando il comando Matlab `Lro = transpose(place(Aro',cro',q))` si ottiene:

$$L_{\mathcal{RO}} = \begin{bmatrix}-1271\\ 1344\end{bmatrix}.$$

Per ottenere il compensatore completo per il sistema originario è sufficiente completare le matrici dei guadagni con degli zeri e applicare la matrice di trasformazione T per ricondurle nelle coordinate di partenza.

Quindi per il sistema completo in forma di Kalman le matrici sono:

$$\hat{K} = \begin{bmatrix}K_{\mathcal{RO}} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ e } \hat{L} = \begin{bmatrix}L_{\mathcal{RO}}^T & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

e per il sistema originario:

$$K = \hat{K}T^{-1} = \begin{bmatrix}-336 & 0 & 0 & 374 & 0\end{bmatrix} \text{ e } L = T^{-1}\hat{L} = \begin{bmatrix}-1271 & 0 & 0 & 1344 & 0\end{bmatrix}^T.$$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce col comando `rsys = reg(sys,K,L)`, dove `sys = ss(A,b,c,0)`.