Regolazione e Controllo — 15 Febbraio 2007

Numero di matricola

–	–	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	–

Si consideri lo schema di principio di apparato sperimentale riportato in fig.1.

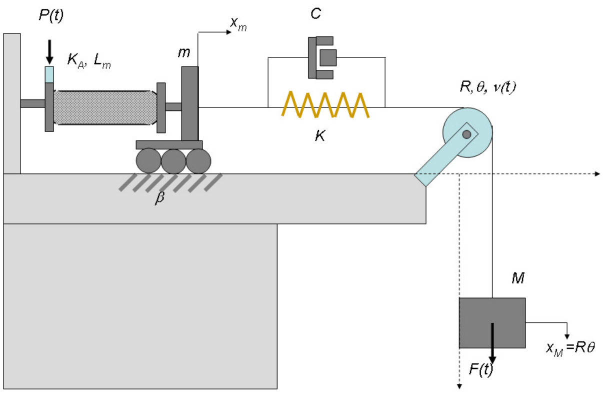

Figure 1: Muscolo Artificiale

Il principale componente dello schema consiste in un attuatore pneumatico nonlineare che tende a contrarsi longitudinalmente all'aumentare del valore della pressione di controllo $p(t)$. L'attuatore muove una massa sospesa tramite una trasmissione composta da un carrello mobile e un tendine cedevole. La posizione della massa sospesa viene misurata mediante un potenziometro angolare affetto da rumore di misura $\nu(t)$.

Il sistema è descritto dalle seguenti equazioni dinamiche

$$\begin{cases} m\ddot{x}_m = -k(x_m - R\theta) - k_A(x_m^2 - L_m^2)p - \Delta\dot{x}_m \\ MR\ddot{\theta} = F + k(x_m - R\theta) + c(\dot{x}_m - R\dot{\theta}) \end{cases} \tag{1}$$

in cui: $M = 6$kg e $m = 1$kg rappresentano rispettivamente la massa sospesa e la massa del carrello; $R = 0.05$m è il raggio della puleggia alla quale è connesso il potenziometro; $\Delta = (20 + \alpha)$N/m s è il coefficiente di attrito radente tra il carrello e la guida prismatica; $c = (20 + \beta)$Nm s è il coefficiente di attrito viscoso del tendine; x_m rappresenta la posizione del carrello lungo la guida; $L_m = 0.5$m è la lunghezza minima dell'attuatore pneumatico; $k_A = 13.3$ è la costante elastica dell'attuatore; $k = (2000 + 100\gamma)$N/m è la costante elastica del tendine; θ è la posizione angolare del potenziometro. Si considera quale ingresso di controllo del sistema la pressione $p(t)$, mentre $F(t)$ rappresenta la somma dei contributi della forza peso e disturbi esterni che agiscono sulla massa sospesa.

A) Trovare il punto di equilibrio del sistema per valori costanti di pressione di controllo $\bar{p} = 5\text{N/m}^2$ e di forza agente sulla massa sospesa $\bar{F} = 10$N.

B) Si linearizzi il sistema attorno a tale punto di equilibrio e si determinino le funzioni di trasferimento che legano $\tilde{\theta}$ con l'ingresso $\tilde{p}$ e il disturbo $\tilde{F}$ (con la tilde si indicano i valori delle variabili traslate nell'equilibrio).

C) Si progetti un controllore che, agendo sulla pressione di controllo $\tilde{p}$, garantisca le specifiche seguenti:

• $\tilde{\theta} = 0$rad a regime per variazioni a gradino della forza $\tilde{F}$;

• tempo di assestamento del sistema controllato $T_a \leq 2.5\,10^{-2}$s e sovraelongazione minore del 10% per ingressi al gradino;

• sensibilità del sistema in anello aperto alle variazioni del parametro k_A per segnali costanti attenuata del 95%;

• riduzione del 90% dell'effetto del rumore di misura sull'uscita a regime per frequenze maggiori di 400Hz.

Si riportino la funzione di trasferimento del controllore, lo schema a blocchi del sistema di controllo progettato, i diagrammi di Bode asintotici del sistema in anello aperto e i diagrammi di Bode del sistema controllato che verifica le specifiche.

D) Si scriva l'espressione della pressione in ingresso $\tilde{p}$ in anello aperto che mantenga $\tilde{\theta} = 0$ a regime per un disturbo $\tilde{F} = 10\sin(200t)$. Si discuta il procedimento effettuato.

Soluzione

A) Si considerino i valori costanti di pressione di controllo $\bar{p} = 5\text{N/m}^2$ e di forza agente sulla massa sospesa $\bar{F} = 10\text{N}$, i punti di equilibrio verificano le equazioni

$$\begin{cases} 0 = -k(\bar{x}_m - R\bar{\theta}) - k_A(\bar{x}_m^2 - L_m^2)\bar{p} \\ 0 = \bar{F} + k(\bar{x}_m - R\bar{\theta}) \end{cases} \tag{2}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene

$$0 = \bar{F} - k_A(\bar{x}_m^2 - L_m^2)\bar{p}, \tag{3}$$

da cui segue

$$\bar{x}_m = \sqrt{\frac{\bar{F}}{k_A\bar{p}} + L_m^2}. \tag{4}$$

Infine, dalla seconda equazione si ottiene

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{F} + k\bar{x}_m}{kR}.$$

B) Si considerino le variabili di stato $[\tilde{x}_m, \tilde{\theta}, \dot{\tilde{x}}_m, \dot{\tilde{\theta}}]$ dove $\tilde{x}_m = x_m - \bar{x}_m$ e $\tilde{\theta} = \theta - \bar{\theta}$, gli ingressi $\tilde{F} = F - \bar{F}$ e $\tilde{p} = p - \bar{p}$. La matrice dinamica del sistema linearizzato calcolato nel punto di equilibrio risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k+2k_A\bar{x}_m\bar{p}}{m} & \frac{kR}{m} & -\frac{\Delta}{m} & 0 \\ \frac{k}{MR} & -\frac{k}{M} & \frac{c}{MR} & -\frac{c}{M} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

La matrice degli ingressi $(\bar{F}, \bar{p})$ è pari a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -k_A\frac{\bar{x}_m^2 - L_m^2}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{MR} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Infine l'uscita del sistema è la variabile $\tilde{\theta}$ e quindi si ha

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Le funzioni di trasferimento richieste risultano quindi

$$G_F(s) = \frac{s^2 m + s\Delta + k + 2\,k_A\,\bar{x}_m\,\bar{p}}{(s^4 mM + (\Delta\,M + mc)\,s^3 + (k(m+M) + \Delta\,c + 2\,k_A\,\bar{x}_m\,\bar{p}\,M)\,s^2 + (2\,ck_A\,\bar{x}_m\,\bar{p} + k\Delta)\,s + 2\,k_A\bar{x}_m\,\bar{p}\,k)R},$$

$$G_p(s) = -\frac{(sc + k)\,k_A\,\left(\bar{x}_m^2 - L_m^2\right)}{(s^4 mM + (\Delta\,M + mc)\,s^3 + (k(m+M) + \Delta\,c + 2\,k_A\,\bar{x}_m\,\bar{p}\,M)\,s^2 + (2\,ck_A\,\bar{x}_m\,\bar{p} + k\Delta)\,s + 2\,k_A\bar{x}_m\,\bar{p}\,k)R},$$

e

$$\tilde{\Theta}(s) = G_F(s)\tilde{F}(s) + G_p(s)\tilde{P}(s).$$

Sostituendo i valori numerici e considerando $\alpha = \beta = \gamma = 0$ si ottengono le funzioni di trasferimento

$$G_F(s) = \frac{3.3333(s^2 + 20s + 2084)}{(s^2 + 2.777s + 11.64)(s^2 + 20.56s + 2416)},\ G_p(s) = \frac{-133.3333(s + 100)}{(s^2 + 2.777s + 11.64)(s^2 + 20.56s + 2416)}.$$

I diagrammi di Bode delle due funzioni di trasferimento sono riportati nelle figure 2 e 3.

C) Si faccia riferimento allo schema a blocchi del sistema di controllo rappresentato in figura 4.

C.1 In anello chiuso la funzione di trasferimento tra $\tilde{\Theta}$ e la $\tilde{F}$ risulta essere pari a $W(s) = \frac{G_F(s)}{1+C(s)G_p(s)}$. Affinché dato un ingresso a gradino, a regime si abbia $\lim_{t\to\infty}\tilde{\theta}(t) = 0$ è necessario che $\lim_{s\to 0} sW(s)\frac{1}{s} = 0$. Considerando che G_F e G_p non hanno poli nell'origine, si impone che $\lim_{s\to 0}\frac{G_F(0)}{1+C(s)G_p(0)} = 0$. Questo si verifica se si progetta un controllore di tipo almeno 1: $C(s) = \frac{\hat{C}(s)}{s}$.

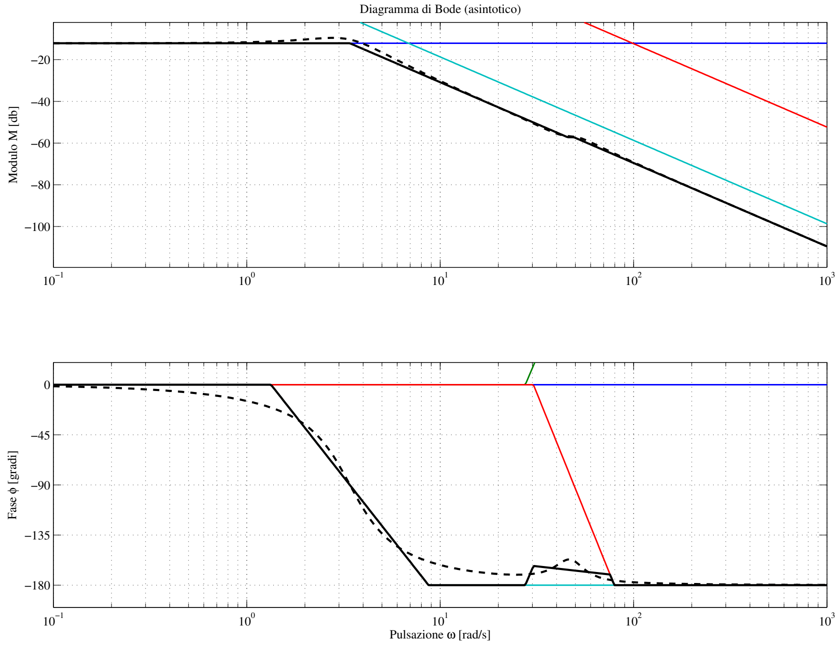

Figure 2: Diagramma di Bode di G_F

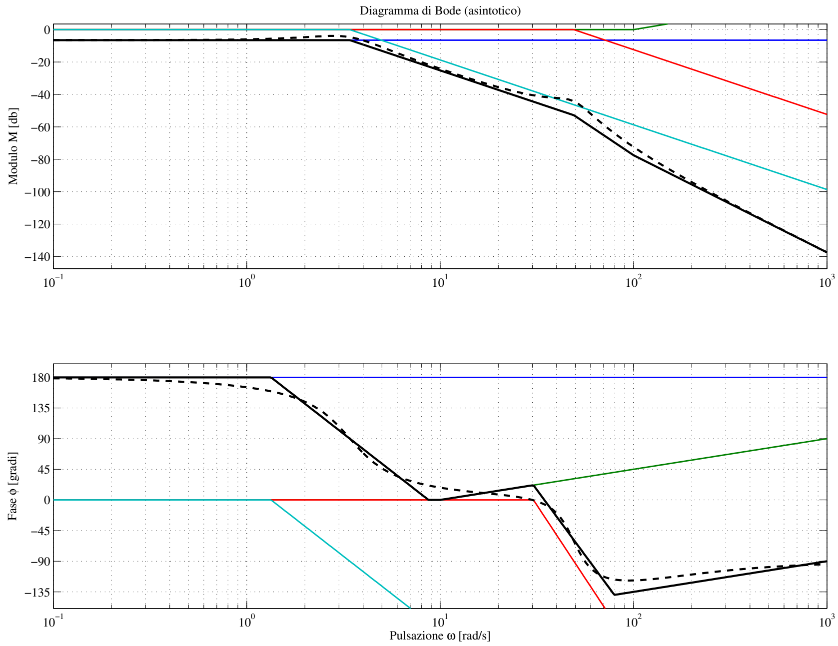

Figure 3: Diagramma di Bode di G_p

C.2 Si considera ora $\tilde{F} = 0$ e si progetta il controllore che verifica la specifica precedente e le specifiche richieste nel testo. Si osserva che il segno negativo di $G_p(0)$ suggerisce l'uso di un controllore con costante di guadagno negativa.

I diagrammi di Bode del sistema in anello aperto con queste scelte sono riportati in figura 5.

La specifica sulla sovraelongazione è indicativamente verificata se il sistema in anello chiuso è approssimabile con un sistema del secondo ordine con smorzamento dei poli dominanti pari a circa 0.6 (come si ricava dalla espressione della sovraelongazione dei sistemi di secondo ordine $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$). Sul piano di Bode, questo

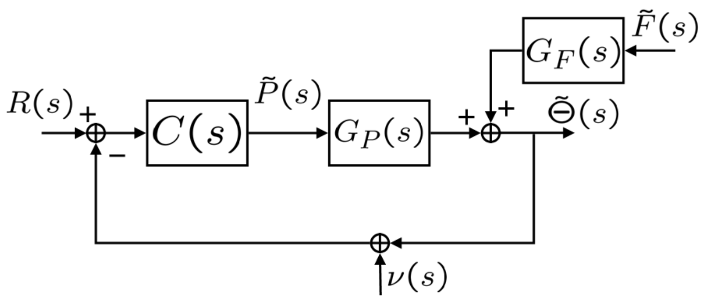

Figure 4: Schema a blocchi del sistema di controllo

significa un margine di fase di 60. La specifica sul tempo di assestamento indicherebbe che la pulsazione naturale dei due poli dominanti deve essere $\omega_n \geq \frac{3}{\delta T_a} = 205$rad/sec circa.

La presenza dei quattro poli nella G_p richiede l'inserimento di più zeri nel controllore per poter garantire la stabilità del sistema.

Si inseriscono ad esempio tre zeri reali in -2.5, -2.45 e in -2.03. Scegliendo una costante di guadagno del controllore pari a -20 si ha che la specifica richiesta è verificata come illustrato in figura 6.

C.3 La sensibilità del sistema in anello chiuso alle variazioni del parametro k_A risulta essere pari a $\frac{1}{1+C(s)G_p(s)}$, essendoci in C un polo nell'origine la specifica risulta già verificata.

C.4 Per frequenze maggiori di circa 2500rad/sec si richiede che $|CG_p| < 0.1|1 + CG_p|$. Ad elevate frequenze si ha che $|1 + CG_p|$ è circa 1 e quindi si richiede che $|CG_p|_{dB} < -20$. Con le scelte effettuate questa specifica risulta gi**a**verificata, si vanno quindi a scegliere due poli in alta frequenza per rendere il controllore causale. Si sceglono, ad esempio, due poli in $-2.34\,10^3$ e in $-1.09\,10^5$. Si aumenta infine la costante di guadagno del controllore a -29.9 in modo tale da avere un maggior margine di fase (circa $68, 5$).

Il controllore che verifica le specifiche richieste risulta essere

$$C(s) = -28.8\frac{(1 + 0.4s)(1 + 0.41s)(1 + 0.49s)}{s(1 + 0.00043s)(1 + 9.2\,10^{-6}s)}$$

Come illustrato in figura 7 il controllore verifica le specifiche sul diagramma di Bode.

La risposta al gradino del sistema in anello chiuso è riportata in figura 8. Si noti che la sovraelongazione è minore del 10% e il tempo di assestamento è minore di $2.5\,10^{-2}$ come richiesto.

D) Affinché a regime si abbia $\tilde{\theta} = 0$ per un disturbo $\tilde{F}(t) = 10\sin(200t)$ si deve avere un ingresso $\tilde{P}(s)$ tale che:

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = \lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}_F(t) + \tilde{\theta}_p(t) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{L}^{-1}(\tilde{\Theta}_F(s) + \tilde{\Theta}_p(s) = 0,$$

dove $\tilde{\Theta}_F(s) = G_F(s)\tilde{F}(s)$ e $\tilde{\Theta}_p(s) = G_p(s)\tilde{P}(s)$. Dal teorema della risposta armonica si ha che $\tilde{\theta}_F(t)$ a regime risulta essere una sinusoide con ampiezza $10|G_F(j200)| = 10^{-3}$ (l'ampiezza della G_F per la pulsazione 200 vale circa -80dB) e sfasamento $arg(G_F(j200)) = -180^o$. Affinchè a regime $\tilde{\theta}(t) = 0$ si deve avere $\tilde{\theta}_p(t)$ con la stessa ampiezza e la stessa frequenza ma sfasata di $\pm 180^o$. Sia $\tilde{p}(t) = A\sin(200t + \phi)$, a regime $\tilde{\theta}_p(t)$ risulta essere una sinusoide con ampiezza $A|G_p(j200)| = 1.7\,10^{-5}A$ (l'ampiezza della G_p per la pulsazione 200 vale -95dB e quindi $1.7\,10^{-5}$) e sfasamento $arg(G_p(j200)) = \phi - 110^o$. Pertanto la pressione cercata deve essere tale che $1.7\,10^{-5}A = 10^{-3}$ e $\phi - 110^o = 0$ da cui $A = 58.8$ e $\phi = 110^o$.

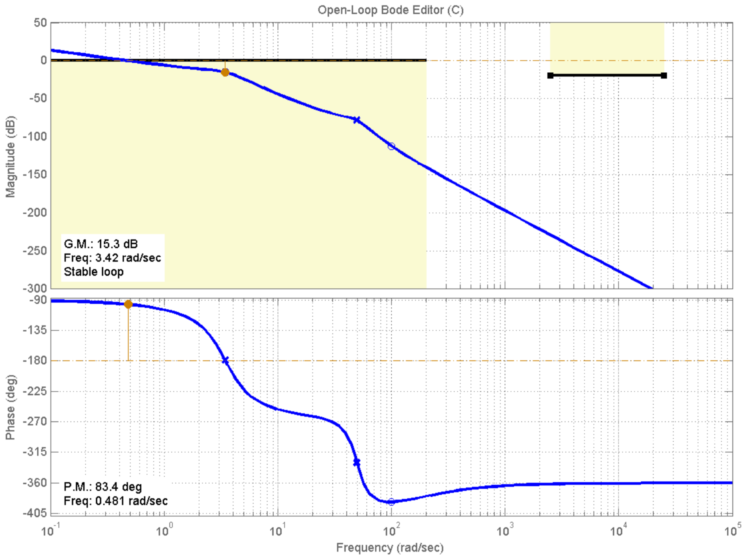

Figure 5: Diagrammi di Bode del sistema in anello aperto una volta inserito nel controllore un polo nell'origine

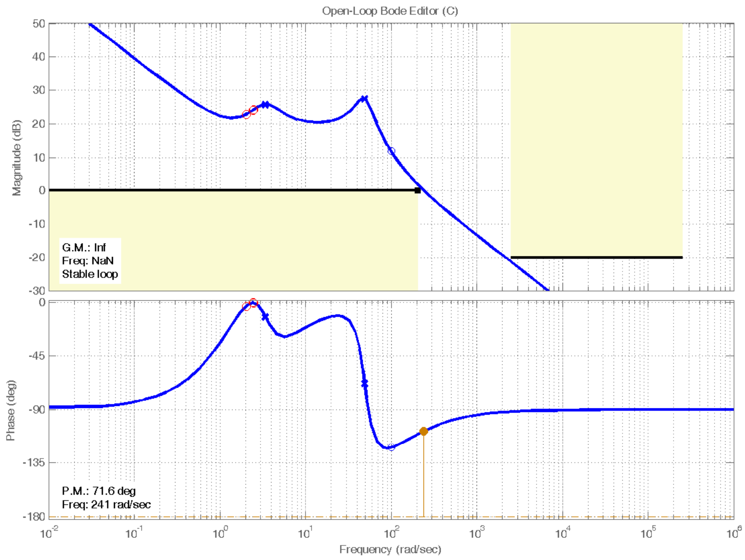

Figure 6: Diagrammi di Bode del sistema in anello aperto una volta inserito nel controllore i tre zeri.

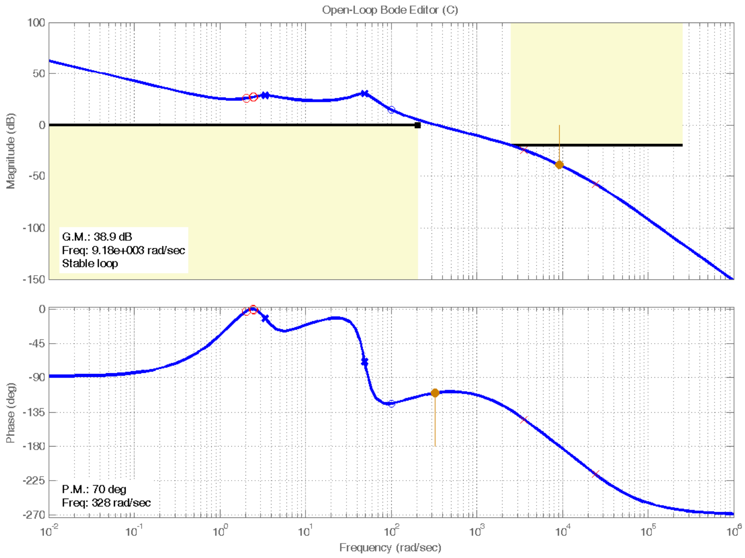

Figure 7: Diagrammi di Bode del sistema in anello aperto con $C(s)$.

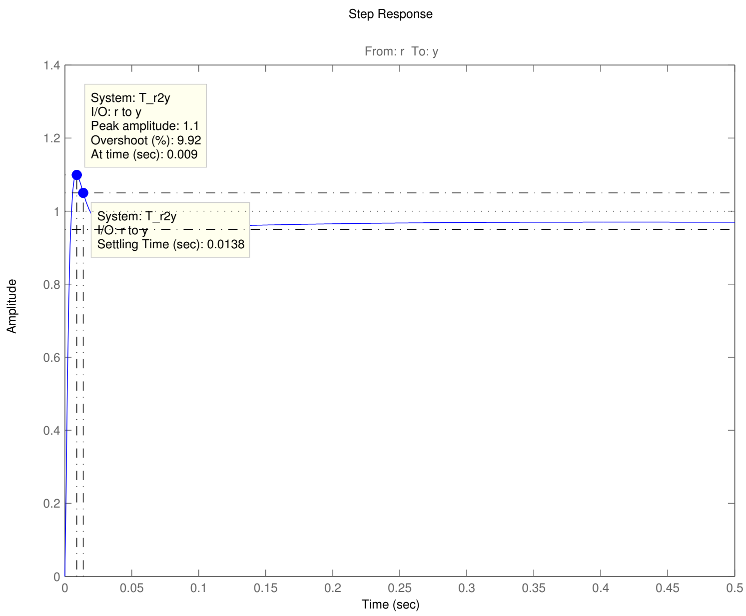

Figure 8: Risposta al gradino del sistema in anello chiuso.