

Quesito 1

Si consideri il modello dinamico di un sistema di posizionamento a nastro trasportatore (figura 1).

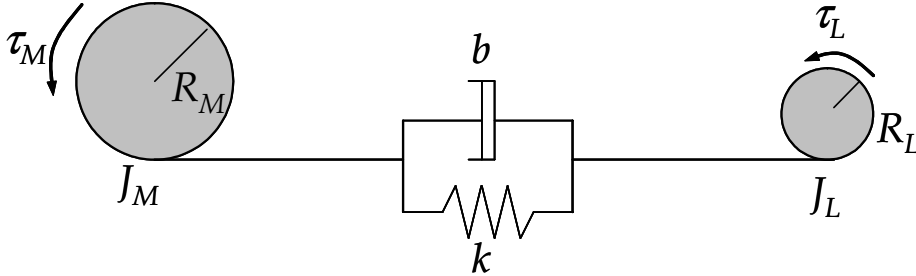


Figure 1: Sistema di posizionamento a nastro trasportatore.

Il nastro è azionato mediante un cilindro di raggio R_M e momento di inerzia J_M cui è applicata una coppia di controllo τ_M . Un secondo cilindro di raggio R_L e momento di inerzia J_L può essere affetto da una coppia di disturbo τ_L . La deformabilità del nastro è modellata con una costante elastica k e uno smorzamento viscoso b .

Le equazioni dinamiche del sistema relative al modello descritto sono:

$$J_M \ddot{\theta}_M + b R_M (R_M \dot{\theta}_M - R_L \dot{\theta}_L) + k R_M (R_M \theta_M - R_L \theta_L) = \tau_M$$

$$J_L \ddot{\theta}_L + b R_L (R_L \dot{\theta}_L - R_M \dot{\theta}_M) + k R_L (R_L \theta_L - R_M \theta_M) = \tau_L,$$

dove θ_M e θ_L rappresentano le posizioni angolari dei due cilindri misurate in radianti.

- 1.A** Si consideri l'equilibrio del sistema corrispondente ad un carico costante $\bar{\tau}_L$ (fissato positivo arbitrariamente) e si scriva il sistema in forma di stato relativamente a tale equilibrio. Si studi la raggiungibilità e l'osservabilità del sistema supponendo di disporre della misura della posizione angolare $y_M = \theta_M$. A tal fine si faccia riferimento ai seguenti valori numerici $J_M = 10^{-5} \text{ Kg } m^2$, $J_L = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Kg } m^2$, $R_M = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $R_L = 10^{-2} \text{ m}$, $k = 10^3 \text{ N/m}$ e $b = 1 \text{ N s/m}$;
- 1.B** Si consideri come uscita controllata (oggetto delle specifiche di progetto) la posizione media del nastro $y_C = \frac{R_M \theta_M + R_L \theta_L}{2}$. Si riportino esplicitamente le f.d.t. tra l'ingresso τ_M e le uscite di misura y_M e controllata y_C . Si progetti un controllore in grado di stabilizzare il sistema e di assicurare l'inseguimento di riferimenti di posizione costanti per l'uscita y_C con errore a regime nullo. Disegnare lo schema completo del sistema controllato. Si verifichi il funzionamento dello schema ottenuto mediante simulazione numerica. *Suggerimento: Per il progetto si faccia riferimento allo schema di montaggio del controllore in catena di retroazione. Essendo differenti l'uscita di misura e l'uscita controllata, si presti particolare attenzione ai coefficienti di scalatura della catena diretta e di retroazione.*

Quesito 2

- 2.A** Si determinino i punti di equilibrio del seguente sistema non lineare e se ne discuta la stabilità al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 - 2x_1$$

$$\dot{x}_2 = kx_2 + 5x_1^2 x_2.$$

Soluzione

1.A Scelto un valore positivo arbitrario per la coppia di disturbo $\tau_L = \bar{\tau}_L$, si ricavano i punti e la coppia di equilibrio. Ponendo $\ddot{\theta}_M = \ddot{\theta}_L = \dot{\theta}_M = \dot{\theta}_L = 0$ si ha

$$\begin{aligned} kR_M (R_M \theta_M - R_L \theta_L) &= \tau_M \\ kR_L (R_L \theta_L - R_M \theta_M) &= \bar{\tau}_L, \end{aligned}$$

da cui la coppia di controllo all'equilibrio è

$$\bar{\tau}_M = -\frac{R_M}{R_L} \bar{\tau}_L.$$

Le posizioni angolari dei due cilindri all'equilibrio, sono legate dalla seguente relazione

$$\bar{\theta}_M = \frac{R_L}{R_M} \bar{\theta}_L - \frac{\bar{\tau}_L}{kR_L R_M},$$

pertanto per ogni valore di $\theta_L = \bar{\theta}_L$ si ha il corrispettivo valore $\bar{\theta}_M$ per la posizione angolare del cilindro controllato. Traslando il sistema rispetto al generico punto di equilibrio calcolato, il vettore di stato diviene $\tilde{\theta} = [\theta_M - \bar{\theta}_M \quad \theta_L - \bar{\theta}_L \quad \dot{\theta}_M \quad \dot{\theta}_L]^T$, ed il sistema assume la forma

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= A\tilde{\theta} + B\tilde{\tau}_M \\ y_M &= C_M\tilde{\theta} \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{kR_M^2}{J_M} & \frac{kR_M R_L}{J_M} & -\frac{bR_M^2}{J_M} & \frac{bR_M R_L}{J_M} \\ \frac{kR_M R_L}{J_L} & -\frac{kR_L^2}{J_L} & \frac{bR_M R_L}{J_L} & -\frac{bR_L^2}{J_L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_M} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_M = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

e $\tilde{\tau}_M = \tau_M - \bar{\tau}_M$. Sostituendo i valori numerici riportati si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 \cdot 10^4 & 2 \cdot 10^4 & -40 & 20 \\ 10^4 & -5 \cdot 10^3 & 10 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da cui le matrici di raggiungibilità

$$R = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 10^5 & -4 \cdot 10^6 & -3.82 \cdot 10^9 \\ 0 & 0 & 10^6 & 9.55 \cdot 10^8 \\ 10^5 & -4 \cdot 10^6 & -3.82 \cdot 10^9 & 3.519 \cdot 10^{11} \\ 0 & 10^6 & 9.55 \cdot 10^8 & -8.7975 \cdot 10^{10} \end{bmatrix},$$

e di osservabilità

$$O = \begin{bmatrix} C_M \\ C_M A \\ C_M A^2 \\ C_M A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 \cdot 10^4 & 2 \cdot 10^4 & -40 & 20 \\ 1.8 \cdot 10^6 & -9 \cdot 10^5 & -3.82 \cdot 10^4 & 1.91 \cdot 10^4 \end{bmatrix}.$$

Entrambe risultano a rango pieno, dunque il sistema è completamente raggiungibile ed osservabile.

1.B L'uscita controllata $y_C = \frac{R_M \theta_M + R_L \theta_L}{2}$ si può esprimere mediante un'altra matrice d'uscita

$$C_C = \left[\frac{R_M}{2} \quad \frac{R_L}{2} \quad 0 \quad 0 \right].$$

Le due funzioni di trasferimento tra l'ingresso τ_M e le uscite di misura y_M e controllata y_C sono rispettivamente

$$\begin{aligned} G_M(s) &= 10^5 \frac{s^2 + 5s + 5 \cdot 10^3}{s^2(s^2 + 45s + 4.5 \cdot 10^4)} \\ G_C(s) &= 10^3 \frac{s^2 + 10s + 10^4}{s^2(s^2 + 45s + 4.5 \cdot 10^4)}. \end{aligned}$$

Si vede che il sistema presenta due autovalori complessi coniugati a parte reale negativa ($-22.5 \pm 210.935j$) e due autovalori nulli dovuti alla presenza del doppio integratore. Il sistema non è quindi stabile e necessita di una stabilizzazione, mentre il requisito di errore nullo a regime per riferimenti costanti risulta automaticamente soddisfatto (il sistema è di tipo 2).

La stabilizzazione si ottiene mediante un controllore basato su regolatore. Calcoliamo una matrice di retroazione statica degli stati K in grado di allocare i poli della matrice $A - BK$ in $p = 10^2 [-0.75 \quad -0.6 \quad -3 + 0.75j \quad -3 - 0.75j]$. Utilizzando il comando Matlab $K = \text{place}(A, B, p)$ si ottiene

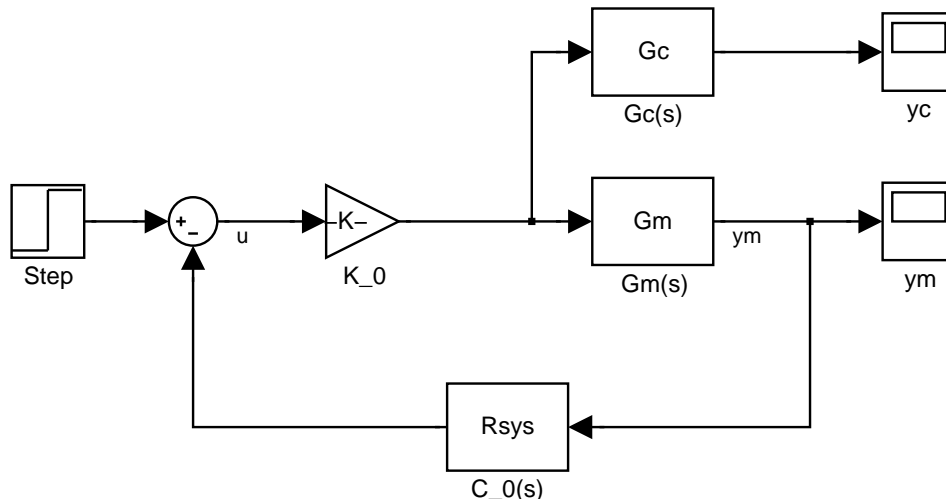
$$K = [1.20946 \quad -0.17442 \quad 0.0069 \quad 0.01173].$$

Per ricostruire gli stati cui non abbiamo accesso, realizziamo un osservatore di Luenberger. La matrice di iniezione delle uscite L è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore $A - LC_M$ abbia autovalori $q = 2p$. Impiegando il comando Matlab $L = \text{transpose}(\text{place}(A', C_M', q))$ si ottiene

$$L = \begin{bmatrix} 1.425 \cdot 10^3 \\ 5.54325 \cdot 10^3 \\ 6.15375 \cdot 10^5 \\ 1.9040625 \cdot 10^5 \end{bmatrix}.$$

Il compensatore ha dunque dinamica $C(s) = K(sI - A + BK + LC_M)^{-1}L$ e può essere ottenuto con il comando Matlab $Cs = \text{ss}(A - B*K - L*C_M, L, K, 0)$ ovvero, a meno di un segno, con $Cs = \text{reg}(\text{sys}_m, K, L)$, ove $\text{sys}_m = \text{ss}(A, B, C_M, 0)$.

Poiché l'uscita di misura differisce da quella controllata, dovrà essere effettuata una opportuna scalatura del guadagno della catena diretta e di quella di retroazione. Nel caso classico di montaggio del compensatore nella catena di retroazione e di presenza di almeno un integratore nella catena diretta, l'errore nullo a regime si garantisce semplicemente normalizzando ad 1 il controllore e spostando il suo guadagno statico in catena diretta (in modo da lasciare inalterato il guadagno d'anello). Nel caso in cui le uscite misurata e controllata differiscano, il guadagno d'anello dovrà sempre rimanere inalterato in modo da lasciare immutate le proprietà di stabilità, ma la normalizzazione del controllore sarà diversa. Sostituiamo quindi al controllore $C(s)$ il controllore $C_0(s) = \frac{C(s)}{K_0}$ con K_0 costante di normalizzazione da determinare. Tale costante sarà poi inserita come guadagno nella catena diretta (vedi schema completo in figura). Si fa notare che lo schema relativo al sistema traslato nell'equilibrio non presenta il canale del disturbo essendo esso costante.



Poiché il sistema a ciclo chiuso è stabile, possiamo applicare il teorema del valore finale alla funzione di trasferimento che esprime l'errore di inseguimento del riferimento in y_C . La trasformata di Laplace di tale errore è $E_C(s) = R(s) - Y_C(s)$ con $R(s)$ trasformata del segnale di riferimento. Si ha inoltre

$$Y_M(s) = \frac{G_M(s)K_0}{1 + G_M(s)K_0C_0(s)}R(s)$$

$$Y_C(s) = G_C(s)K_0 (R(s) - C_0(s)Y_M(s)),$$

da cui si ottiene, esplicitando la presenza dei due integratori

$$E_C(s) = \left(1 - \frac{1}{s^2} G'_C(s) K_0 \left(1 - \frac{\frac{1}{s^2} C_0(s) K_0 G'_M(s)}{1 + \frac{1}{s^2} G'_M(s) K_0 C_0(s)} \right) \right) R(s)$$

$$= \left(1 - \frac{G'_C(s) K_0}{s^2 + G'_M(s) K_0 C_0(s)} \right) R(s).$$

Applichiamo il teorema del valore finale nel caso di ingresso a gradino $R(s) = \frac{1}{s}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s E_C(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left(1 - \frac{G'_C(s) K_0}{s^2 + G'_M(s) K_0 C_0(s)} \right)$$

$$= 1 - \frac{G'_C(0)}{G'_M(0) C_0(0)}$$

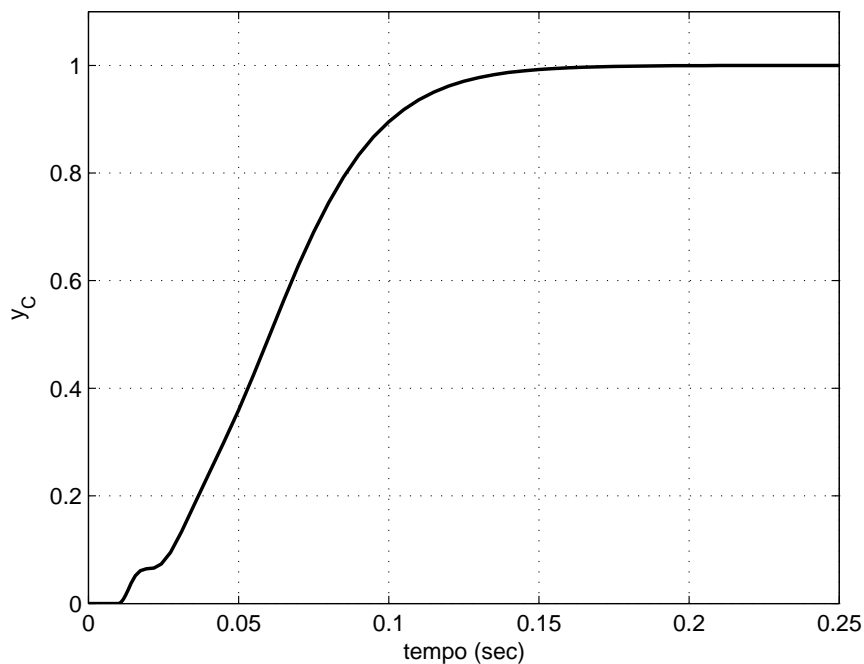
$$= 1 - \frac{K_0 G'_C(0)}{G'_M(0) C_0(0)}.$$

L'errore risulta quindi nullo se

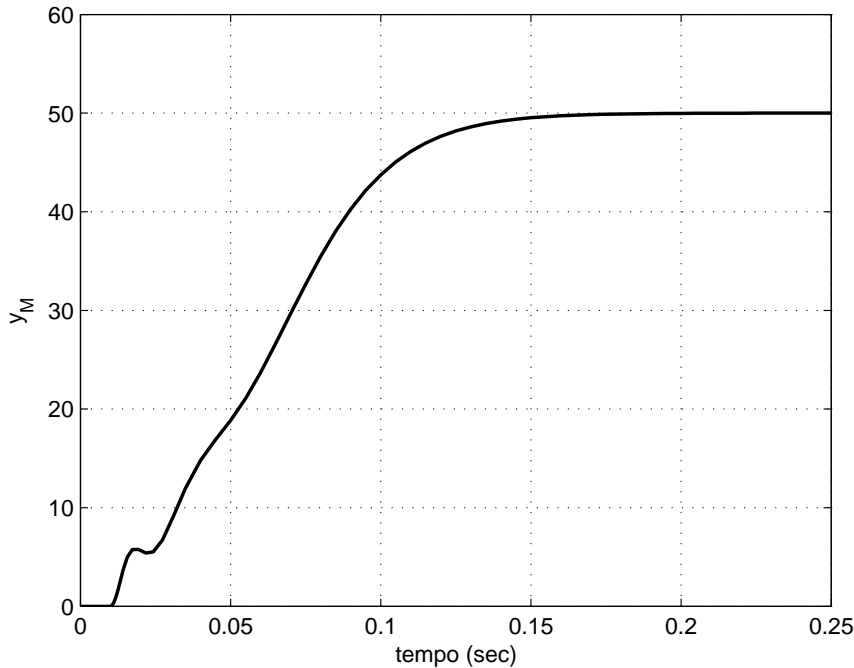
$$K_0 = \frac{G'_M(0) C_0(0)}{G'_C(0)}.$$

Nel caso in esame risulta $K_0 = 6.1345$.

L'uscita controllata y_C in risposta ad un gradino unitario è riportata nella seguente figura.



Come si vede l'uscita insegue perfettamente il riferimento a gradino. Ovviamente ciò non accade nel caso dell'uscita di misura che ammette un errore finito a regime al gradino (vedi figura).



2.A Per determinare i punti di equilibrio del sistema dato, si deve risolvere il seguente sistema di equazioni algebriche:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1(x_2 - 2) \\ 0 &= x_2(k + 5x_1^2). \end{aligned}$$

Scegliendo dalla prima equazione la soluzione $x_1 = 0$ e sostituendola nella seconda, si ottiene $x_2 k = 0$. Nell'ipotesi $k \neq 0$, si ricava $x_2 = 0$, mentre nell'ipotesi $k = 0$ il valore della variabile x_2 risulta indeterminato. Scegliendo invece dalla prima equazione la soluzione $x_2 = 2$ e sostituendola nella seconda, si ottengono i valori $x_1 = \pm \sqrt{\frac{-k}{5}}$ con la condizione $k < 0$.

In conclusione, gli equilibri del sistema sono i seguenti:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} & \text{per } k \neq 0 \\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \bar{x}_2 \end{cases} & \text{per } k = 0 \text{ e } \bar{x}_2 \text{ generico} \\ \begin{cases} x_1 = \pm \sqrt{\frac{-k}{5}} \\ x_2 = 2 \end{cases} & \text{per } k < 0. \end{cases}$$

Linearizzando le equazioni del sistema $\dot{x} = f(x)$ nell'intorno del generico punto di equilibrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , si ottiene:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = \begin{bmatrix} x_2 - 2 & x_1 \\ 10x_1x_2 & k + 5x_1^2 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}$$

La matrice A valutata nell'origine $(x_1, x_2) = (0, 0)$ con la condizione $k \neq 0$, diventa

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

e possiede gli autovalori $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = k$. L'origine risulta pertanto asintoticamente stabile se $k < 0$ e instabile se $k > 0$.

Nel caso dei punti di equilibrio $(x_1, x_2) = \left(\pm \sqrt{\frac{-k}{5}}, 2 \right)$, con la condizione $k < 0$, la matrice A diventa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \bar{x}_1 \\ 20\bar{x}_1 & k + 5\bar{x}_1^2 \end{bmatrix},$$

ove per semplicità di scrittura si sia posto genericamente $\bar{x}_1 = \pm\sqrt{\frac{-k}{5}}$. Il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di A è dato da

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (k + 5\bar{x}_1^2)\lambda - 20\bar{x}_1^2.$$

Sostituendo i due valori per \bar{x}_1 , si ottiene $p(\lambda) = \lambda^2 + 4k$, che ha radici reali $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{-k}$ (ben poste essendo $k < 0$). Entrambi i punti di equilibrio $(x_1, x_2) = \left(\pm\sqrt{\frac{-k}{5}}, 2\right)$ risultano quindi instabili poiché il sistema linearizzato possiede un autovalore positivo.

Infine nel caso della retta di punti di equilibrio $(x_1, x_2) = (0, \bar{x}_2)$ e con $k = 0$, la matrice A diventa

$$A = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e possiede gli autovalori $\lambda_1 = \bar{x}_2 - 2$ e $\lambda_2 = 0$. I punti di equilibrio $(x_1, x_2) = (0, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_2 > 2$ risultano pertanto instabili, mentre nulla si può concludere circa la loro stabilità per $\bar{x}_2 \leq 0$. In tal caso è necessaria un'analisi mediante funzione di Lyapunov. Facciamo uso della seguente funzione candidata di Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - \bar{x}_2)^2.$$

La derivata totale rispetto al tempo è

$$\dot{V} = L_f V = x_1^2 (5x_2^2 - x_2(5\bar{x}_2 - 1) - 2),$$

che risulterà essere al più semidefinita negativa se $5x_2^2 - x_2(5\bar{x}_2 - 1) - 2 \leq 0$. I punti in questione potranno quindi essere al più marginalmente stabili. L'asintotica stabilità, d'altronde, è esclusa dalla natura stessa di insieme denso di punti di equilibrio. Se si considera l'insieme $H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0, x_2 < 2\}$, risulta infatti evidente come non sia mai possibile individuare un intorno aperto $W_{\bar{x}_2}$ per ogni $\bar{x}_2 \in H$, tale che tutte le traiettorie aventi origine in esso convergano a \bar{x}_2 . A tal fine è sufficiente prendere in considerazione le traiettorie aventi origine nell'insieme $W_{\bar{x}_2} \cap H$.

Per quanto riguarda il punto estremo di tale semiretta di equilibrio, cioè il punto $(0, 2)$ con $k = 0$, esso sarà sicuramente instabile come si può dedurre dalla definizione di stabilità alla Lyapunov. Non è infatti possibile per esso definire un ε -intorno di stabilità per traiettorie che hanno origine in un δ -intorno. Si vede, dal sistema linearizzato precedente, che tutte le traiettorie che hanno origine in $(0, \bar{x}_2)$ con $\bar{x}_2 > 2$ sono divergenti.

Analizzeremo, quindi, i punti dell'insieme H e, data la natura di eventuale semplice stabilità di detti punti, considereremo la disuguaglianza $5x_2^2 - x_2(5\bar{x}_2 - 1) - 2 < 0$ in modo stretto. Questa disuguaglianza è verificata per $x_2^i \leq x_2 \leq x_2^s$ ove

$$x_2^i = \frac{5\bar{x}_2 - 1 - \sqrt{(5\bar{x}_2 - 1)^2 + 40}}{10}$$

$$x_2^s = \frac{5\bar{x}_2 - 1 + \sqrt{(5\bar{x}_2 - 1)^2 + 40}}{10}.$$

Esiste quindi un insieme, funzione dell'ordinata di equilibrio \bar{x}_2 , $U(\bar{x}_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^i \leq x_2 \leq x_2^s\}$ nel quale $\dot{V} \leq 0$. Dobbiamo appurare per quali valori di \bar{x}_2 risulta valere $\bar{x}_2 \in U(\bar{x}_2)$. Solo per essi si potrà parlare di marginale stabilità. Risolviamo quindi il sistema di disuguaglianze $x_2^i \leq \bar{x}_2 \leq x_2^s$:

$$\begin{cases} 5\bar{x}_2 - 1 - \sqrt{(5\bar{x}_2 - 1)^2 + 40} < 10\bar{x}_2 \\ 5\bar{x}_2 - 1 + \sqrt{(5\bar{x}_2 - 1)^2 + 40} > 10\bar{x}_2 \end{cases}.$$

Dalla prima abbiamo

$$-(5\bar{x}_2 + 1) < \sqrt{(5\bar{x}_2 - 1)^2 + 40}$$

che risulta automaticamente verificata se $5\bar{x}_2 + 1 > 0$, cioè per $\bar{x}_2 > -\frac{1}{5}$. Mentre se $\bar{x}_2 < -\frac{1}{5}$ il primo membro risulta positivo e possiamo elevare al quadrato entrambi i membri ottenendo

$$(5\bar{x}_2 + 1)^2 < (5\bar{x}_2 - 1)^2 + 40$$

cioè

$$\bar{x}_2 < 2.$$

Quindi per $\bar{x}_2 < 2$, limitazione già presente nell'insieme H , $x_2^i < \bar{x}_2$. Verifichiamo ora la seconda disuguaglianza

$$\sqrt{(5\bar{x}_2 - 1)^2 + 40} > 5\bar{x}_2 + 1.$$

Anche in questo caso se $\bar{x}_2 < -\frac{1}{5}$ la disuguaglianza risulta verificata automaticamente. In caso $\bar{x}_2 > -\frac{1}{5}$ possiamo quadrare entrambi i membri e ottenere

$$(5\bar{x}_2 - 1)^2 + 40 > (5\bar{x}_2 + 1)^2$$

cioè ancora una volta

$$\bar{x}_2 < 2.$$

In conclusione per $\bar{x}_2 < 2$ $\dot{V} \leq 0$ in $U(\bar{x}_2)$. I punti $(x_1, x_2) \in H$ sono quindi marginalmente stabili.