

Si consideri il modello dinamico di un contenitore per il trasferimento di metallo fuso (figura 1).

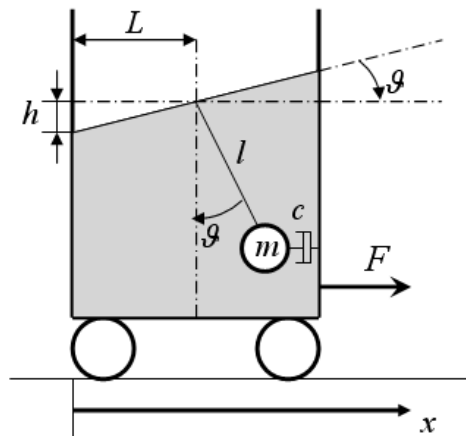


Figure 1: Contenitore per il trasferimento di metallo fuso.

Il fenomeno di oscillazione del fluido nel contenitore durante il suo moto può essere descritto mediante un modello equivalente di pendolo con frizione. Indicato con  $\theta$  l'angolo tra la linea orizzontale e la superficie del fluido e con  $F$  la forza di controllo (lungo  $x$ ) applicata al contenitore, le equazioni dinamiche del sistema sono

$$J\ddot{\theta} = -cl^2\dot{\theta}\cos^2\theta - mgl\sin\theta + l\cos\theta F$$

dove  $J = ml^2$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $c$  rappresentano rispettivamente il momento di inerzia, la massa, la lunghezza e il coefficiente di viscosità del pendolo equivalente. Con  $g$  si è indicata, come di consueto, l'accelerazione di gravità.

- A** Si determini il moto di regime del fluido corrispondente ad una forza costante  $F = \bar{F}$ ;
- B** Supponendo di disporre della misura dello scostamento verticale  $h$  del fluido rispetto alla linea orizzontale, si determini il linearizzato del sistema attorno al regime ottenuto con  $\bar{F} = 0$ ;
- C** Considerando i seguenti valori numerici:  $m = 0.975$  Kg,  $l = 0.055$  m,  $c = 0.539$  Kg/s,  $L = 0.3$  m, si determini una legge per il controllo della forza  $F$  che agisca in modo da garantire che:
- c1)** lo scostamento  $h$  del livello del fluido si porti ad un valore costante assegnato  $\bar{h} = 10$  cm, entro una tolleranza del 5%, in un tempo non superiore a 0.1 s;
  - c2)** il liquido non tracimi dal bordo del contenitore, il quale è posto 12 cm al di sopra del livello di equilibrio del liquido;
  - c3)** per modellare la non perfetta realizzazione della forza  $F$  da parte dell'attuatore utilizzato, si consideri che la forza effettivamente applicata sul sistema sia data dalla somma della  $F$  nominale e di un termine  $\tilde{F}(t)$ , con ampiezza  $|\tilde{F}(t)| \leq 0.1$  N, variabile nel tempo con frequenza non superiore a 1 rad/s. In queste condizioni, si garantisca che l'errore indotto sul valore  $h$  di regime si limiti a  $\pm 1$  mm.
  - c4)** supponendo che il sensore di misura della altezza  $h$  sia soggetto a rumore a frequenze non inferiori a 160 Hz, si desidera che il suo effetto sulla uscita sia attenuato di un fattore almeno pari a 10.
- D** Si consideri il caso in cui lo stesso sistema fisico e lo stesso controllore siano utilizzati per trasportare un liquido per il quale le costanti sopra definite sono diverse dal valore nominale, e valga  $0.9 \leq m \leq 1.0$ ,  $0.5 \leq c \leq 0.6$ ,  $0.05 \leq l \leq 0.06$ .
- Si determini se il sistema controllato rimane stabile per tutti i valori possibili negli intervalli dati (in mancanza di tempo per svolgere i calcoli, si descriva dettagliatamente il procedimento mediante il quale è possibile ottenere la risposta).

## Soluzione

**A** Indicando con  $x = [x_1, x_2]^T = [\theta, \dot{\theta}]^T$  lo stato del sistema sotto esame, la dinamica non lineare nello spazio di stato sarà

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -cl^2 x_2 \cos^2 x_1 - mgl \sin x_1 + l \cos x_1 F \end{bmatrix}$$

dalla quale è possibile determinare immediatamente il moto di regime del sistema sottoposto ad una forza generica, ma costante,  $F = \bar{F}$ :

$$\begin{cases} x_1 = \arctan\left(\frac{\bar{F}}{mg}\right) \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Si noti come una forza di regime  $\bar{F} \neq 0$  (per la quale corrisponde un moto uniformemente accelerato per il carrello) stabilizzi il fluido su un angolo costante  $\theta \neq 0$ . Da questa semplice analisi e considerando il Teorema Indiretto di Lyapunov è possibile concludere fin da subito che il linearizzato attorno a questo moto di regime non conterrà poli a parte reale positiva.

**B** Nel caso in cui  $\bar{F} = 0$ , l'equilibrio cercato è l'origine dello spazio di stato determinato al punto precedente. Pertanto, la dinamica linearizzata del sistema sarà:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{lmg}{J} & -\frac{l^2 c}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{J} \end{bmatrix} u = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Bu$$

L'altezza del fluido  $h$  del fluido rispetto all'orizzontale, espressa in funzione delle variabili di stato del sistema, è determinata da:

$$h = L \tan \theta = L \tan x_1$$

pertanto, la versione linearizzata della funzione di uscita (ottenuta come per la dinamica nello spazio di stato da un'approssimazione di Taylor al prim'ordine)

$$y = [L \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

**C** Il sistema linearizzato è asintoticamente stabile in anello aperto (come precedentemente ipotizzato) per qualsiasi scelta dei parametri. Infatti, analizzando la funzione di trasferimento in anello aperto:

$$G(s) = \frac{Ll}{s^2 J + sl^2 c + lmg}$$

e i relativi poli del denominatore

$$\frac{-l^2 c \pm \sqrt{l^4 c^2 - 4lmgJ}}{2J}$$

e ricordando che tutti i parametri fisici hanno valore maggiore di zero, non esiste alcuna combinazione di valori tali per cui la parte reale sia maggiore di zero.

Il progetto di un controllore che permetta al sistema complessivo di rispettare le specifiche può essere affrontato direttamente sui diagrammi di Bode poiché la  $G(s)$  è anche a fase minima. Facendo riferimento al progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k}{s^t} \hat{C}(s), \text{ con } \hat{C}(0) = 1,$$

iniziamo considerando la scelta del tipo  $t$  e della costante di guadagno  $k$  del controllore basandoci sulle specifiche statiche, successivamente passeremo alle specifiche dinamiche. Quindi:

**c1)** per ottenere inseguimento di un riferimento pari a  $\bar{h}$  con un errore massimo del 5%, è necessario applicare il teorema del Valore Finale alla funzione errore di inseguimento:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} R(s)$$

quindi:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \frac{H(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k}{s^t} \hat{C}(s)G(s)} \bar{h}$$

Il soddisfacimento della prima specifica statica avviene se:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k}{s^t} \hat{C}(s)G(s)} \bar{h} \leq 0.05 \bar{h} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k}{s^t} \hat{C}(s)G(s)} \leq 0.05$$

Una soluzione possibile, sebbene eccessiva, è piazzare un polo nell'origine del controllore ( $t = 1$ ), rendendo il sistema complessivo a ciclo chiuso del primo ordine. Si noti però come tale soluzione imponga la successiva aggiunta di zeri a bassa frequenza qualora si voglia una risposta del sistema più pronta (aumentando la spesa per il controllo). Una soluzione più parsimoniosa consiste nell'imporre un guadagno  $k$  ad-hoc, senza l'aggiunta di alcun polo nell'origine ( $t = 0$ ):

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k}{s^t} \hat{C}(s)G(s)} \bar{h} \leq 0.05 \bar{h} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{k}{s^t} \hat{C}(s)G(s)} \leq 0.05 \Rightarrow k \geq \frac{1 - 0.05}{0.05 G(0)}$$

il guadagno statico del sistema è  $G(0) = 0.0314$ , quindi  $k \geq 605.2117$ .

Il diagramma di Bode di  $kG(s)$  è riportato in fig. 2, a sinistra, mentre la risposta al gradino (unitario) per il sistema originale  $G(s)$  e per il controllato  $\frac{kG(s)}{1+kG(s)}$  sono riportate in fig. 2, a destra.

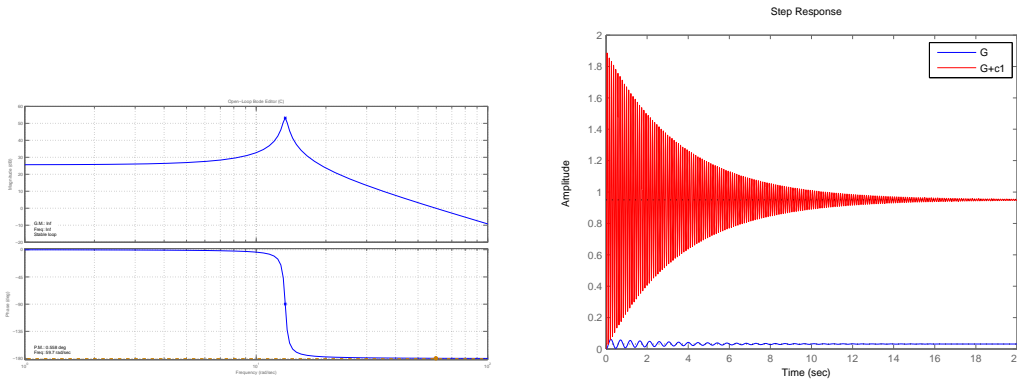


Figure 2: Diagramma di Bode della f.d.t.  $kG(s)$  (sinistra) e risposte al gradino (unitario) per il sistema originale  $G(s)$  e per il controllato  $\frac{kG(s)}{1+kG(s)}$  (destra).

Si noti come la specifica sul tempo di assestamento ancora non sia stata affrontata, ma verrà accorpata alla specifica seguente sulla sovralongazione.

- c2)** il riferimento imposto per l'altezza del liquido ( $\bar{h} = 10$  cm) in combinazione con l'altezza del bordo del contenitore (12 cm), entrambi espressi in funzione del livello orizzontale del liquido, determinano il valore massimo della sovralongazione percentuale in grado di evitare la tracimazione: 20%. Le specifiche sul tempo di assestamento  $T_a = 0.1$  s e la sovralongazione percentuale  $S = 20\%$  possono essere ottenute con un controllore che renda il sistema in anello chiuso approssimabile con due poli dominanti le cui caratteristiche frequenziali siano

$$S = \exp\left(\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \Rightarrow \delta = 0.46 \Rightarrow M_\phi \approx 46 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T = 65.22 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla banda passante sono riportati in fig. 3.

- c3)** il sistema sotto analisi è asintoticamente stabile ed è quindi applicabile il teorema della risposta armonica. Notando che la funzione di trasferimento tra  $\tilde{F}$  e l'uscita  $h$  è pari a

$$h(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)\tilde{F}(j\omega)}$$

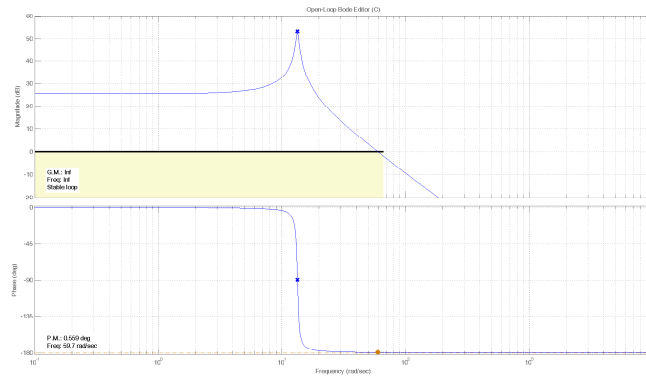


Figure 3: Diagramma di Bode della f.d.t.  $kG(s)$  con specifica sulla banda passante.

questa specifica è equivalente a richiedere che per pulsazioni minori di 1 rad/s si abbia:

$$\left| \frac{.1G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{db} < -60 \text{ db},$$

Perciò, per basse frequenze si cerca un guadagno elevato di  $C(s)G(s)$  e quindi un controllore  $C(s)$  tale che  $\left| \frac{C(s)G(s)}{10^{-1}G(s)} \right|_{db} > 60 \text{ db}$  o equivalentemente  $|C(s)|_{db} > 40 \text{ db}$ , specifica rispettata nel nostro caso dal vincolo sull'errore di regime. Nella figura 4, il vincolo relativo a questa specifica è dato da  $|C(s)G(s)|_{db} \geq 10 \text{ db}$  alle pulsazioni minori di 1 rad/s. Infatti, il vincolo  $|C(s)G(s)|_{db} > 60 \text{ db} + |10^{-1}G(s)|_{db}$  si semplifica notando che per frequenze inferiori a 1 rad/s il guadagno  $|G(s)|_{db} \geq -30 \text{ db}$ ;

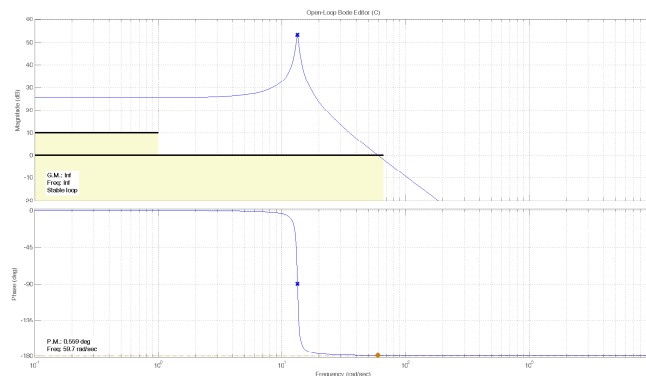


Figure 4: Diagramma di Bode della f.d.t.  $kG(s)$  con specifica sulla banda passante e sul disturbo di attuazione.

- c4)** la funzione di trasferimento tra il disturbo  $\nu$  sul sensore di posizione e l'uscita  $h$  è  $H(s) = -\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}\nu(s)$ , per elevate frequenze si vuole un basso guadagno della funzione d'anello  $C(s)G(s)$  e quindi si richiede:

$$|C(s)G(s)|_{db} < -20 \text{ db}$$

per frequenze maggiori di 1000 rad/s. Le limitazioni relative anche a questa specifica sono riportate in figura 5.

Dai vincoli imposti dalle specifiche si nota come sia necessario un aumento in fase da parte del controllore per rispettare il vincolo sulle specifiche dinamiche di sovralongazione. Un controllore del tipo

$$C(s) = 606 \frac{\frac{s}{20} + 1}{\frac{s}{370} + 1}$$

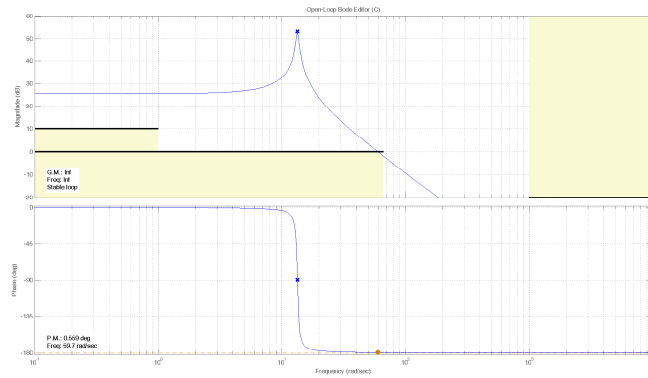


Figure 5: Diagramma di Bode della f.d.t.  $kG(s)$  con specifica sulla banda passante, sul disturbo di attuazione e sul disturbo di misura.

utilizza una semplice coppia polo-zero: il polo è necessario per la causalità e per le specifiche di alta frequenza. Il diagramma di Bode del guadagno di anello e la risposta al gradino in catena chiusa sono riportati nelle figure seguenti.

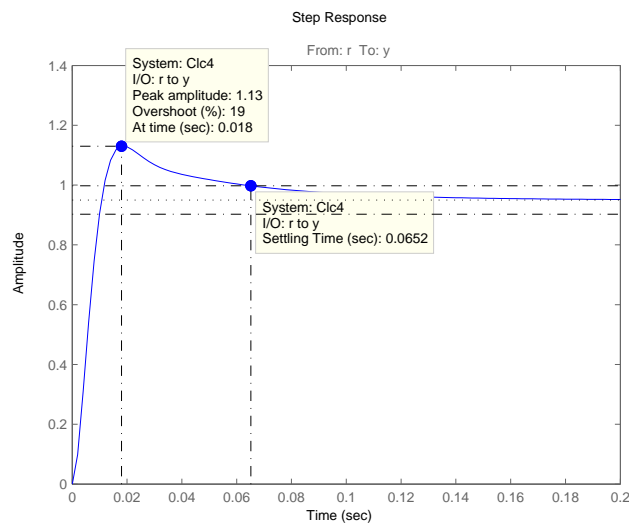
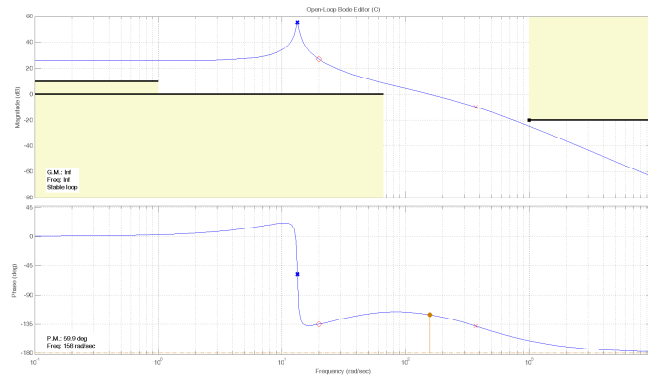


Figure 6: Diagramma di Bode del guadagno di anello e risposta al gradino in catena chiusa.

**D** per verificare la stabilità del sistema controllato al variare dei parametri, è necessario derivare per prima cosa il denominatore della funzione di trasferimento complessiva a ciclo chiuso in forma

simbolica, considerando un controllore del tipo

$$C(s) = k \frac{\frac{s}{z} + 1}{\frac{s}{p} + 1} = k \frac{n_c}{d_c}$$

dove  $n_c$  ( $d_c$ ) rappresenta il numeratore (denominatore) della funzione di trasferimento e quindi

$$G_{cl} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{k \frac{n_c}{d_c} \frac{n_g}{d_g}}{1 + k \frac{n_c}{d_c} \frac{n_g}{d_g}} = \frac{kn_c n_g}{d_c d_g + kn_c n_g}$$

Lo studio della stabilità può essere così intrapreso considerando che

$$d_c d_g + kn_c n_g = \left(\frac{s}{p} + 1\right) (s^2 J + sl^2 c + lmg) + k \left(\frac{s}{z} + 1\right) Ll = \frac{J}{p} s^3 + \left(\frac{l^2 c}{p} + J\right) s^2 + \left(\frac{lmg}{p} + l^2 c + \frac{kLl}{z}\right) s + kLl + lmg$$

ovvero

$$zJs^3 + (zl^2c + zpJ)s^2 + (zpl^2c + zlmg + kpLl)s + zplmg + kpLlz$$

Notando che i parametri noti con certezza sono pari a

$$\begin{cases} k = 606 \\ z = 20 \\ p = 370 \\ L = 0.3 \end{cases}$$

in quanto anche il momento di inerzia è variabile

$$J = ml^2 \Rightarrow 0.00225 \leq J \leq 0.0036$$

Il denominatore in forma numerica sarà quindi

$$0.004Js^3 + (0.004l^2c + 1.48J)s^2 + (1.48l^2c + 0.0392lm + 13.4532l)s + 14.504lm + 269.064l = \alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3$$

Per valutare la stabilità del sistema a ciclo chiuso al variare dei parametri è possibile applicare il Criterio di Kharitonov, considerando i valori massimi e minimi di ciascun coefficiente

$$\begin{cases} \alpha_0^{min} = 9 \cdot 10^{-6}; & \alpha_0^{max} = 1.44 \cdot 10^{-5} \\ \alpha_1^{min} = 3.335 \cdot 10^{-3}; & \alpha_1^{max} = 5.33664 \cdot 10^{-3} \\ \alpha_2^{min} = 0.676274; & \alpha_2^{max} = 0.8127408 \\ \alpha_3^{min} = 14.10588; & \alpha_3^{max} = 17.01408 \end{cases}$$

ed andando poi a studiare la stabilità dei quattro polinomi “angolari”

$$\begin{cases} p_a(s) = 1.44 \cdot 10^{-5} s^3 + 5.33664 \cdot 10^{-3} s^2 + 0.676274s + 14.10588 \\ p_b(s) = 9 \cdot 10^{-6} s^3 + 3.335 \cdot 10^{-3} s^2 + 0.8127408s + 17.01408 \\ p_c(s) = 1.44 \cdot 10^{-5} s^3 + 3.335 \cdot 10^{-3} s^2 + 0.676274s + 17.01408 \\ p_d(s) = 9 \cdot 10^{-6} s^3 + 5.33664 \cdot 10^{-3} s^2 + 0.8127408s + 14.10588 \end{cases}$$

Le radici dei quattro polinomi riportati, calcolabili con il Criterio di Routh o numericamente, sono tutte a parte reale negativa. Dunque, per il Criterio di Kharitonov, il sistema complessivo a ciclo chiuso risulta asintoticamente stabile per tutti i valori assunti negli intervalli sopra specificati.

Un altro metodo utilizzabile per valutare la stabilità del sistema controllato al variare dei parametri negli intervalli nominali è attraverso il criterio di Routh-Hurwitz. Anche in questo caso, partendo dal polinomio al denominatore del sistema a ciclo chiuso:

$$p(s) = \alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3$$

possiamo ricavare la tabella di Routh:

$r_0$	$\alpha_0$	$\alpha_2$
$r_1$	$\alpha_1$	$\alpha_3$
$r_3$	$\alpha_2 - \frac{\alpha_0 \cdot \alpha_3}{\alpha_1}$	0
$r_4$	$\alpha_2$	0

Dopo alcuni passaggi, ricordando che  $J = ml^2$  si perviene a:

$$\begin{aligned} r_0 &= zml^2 \\ r_1 &= zl^2(c + mp) \\ r_2 &= zpl^2c + zlmg + kplL - \frac{m(zplmg + kplLz)}{c + mp} \\ r_3 &= zpl^2c + zlmg + kplL \end{aligned}$$

Andiamo quindi ad analizzare il segno degli  $r_i$ . Ricordando che  $(z, p, k, l, L, m, g, c) > 0$  è evidente come  $(r_0, r_1, r_3) > 0$ . Rimane da studiare il segno di  $r_2$ . Dato il segno di  $r_1$  e  $r_3$ , per la stabilità dobbiamo avere che anche  $r_2 > 0$ , ma questo equivale a dire che:

$$\frac{(zpl^2c + zlmg + kplL)(c + mp) - m(zplmg + kplLz)}{c + mp} > 0$$

essendo  $(c + mp) > 0$  per tutti i valori di  $m$  e  $c$  negli intervalli, dopo alcuni passaggi si perviene a:

$$zpl^2c^2 + zlmgc + kplLc + zmp^2l^2c + kplLc > mkplL(z - p)$$

notando che  $(z - p) = (20 - 370) < 0$ , abbiamo che il primo termine della disequazione è sempre maggiore del secondo e quindi  $r_2 > 0$ . Ciò ci assicura la stabilità asintotica del sistema controllato per tutti i valori dei parametri negli intervalli considerati.