

Si consideri il modello dinamico del sistema elettromeccanico mostrato in figura 1.

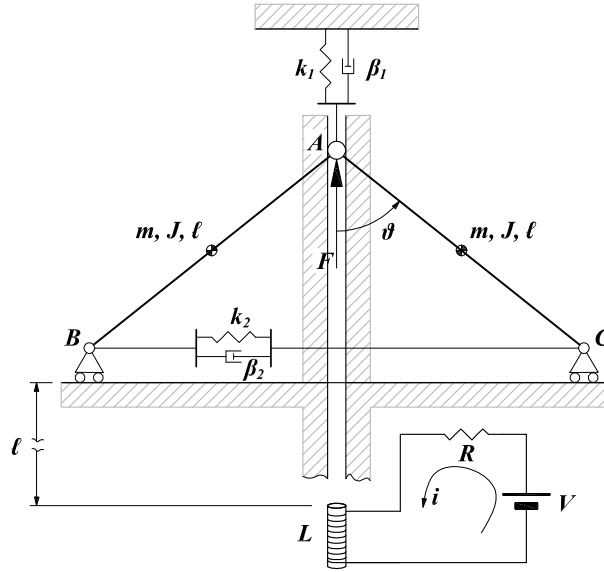


Figure 1: Sistema meccanico senza attuatore.

Esso è costituito da due aste omogenee di massa m , momento d'inerzia J e lunghezza ℓ , che sono connesse ad una estremità (punto A) attraverso una cerniera priva di attrito, vincolata a muoversi lungo una guida verticale. Il punto A a sua volta è vincolato a terra con un gruppo molla-smorzatore (k_1, β_1) nel quale la molla risulta indeformata quando le aste sono in posizione verticale. Le altre estremità delle due aste sono invece vincolate a muoversi lungo un piano orizzontale senza attrito attraverso due carrelli di massa trascurabile. I due carrelli sono collegati tra loro attraverso una molla di costante elastica k_2 e lunghezza a riposo ℓ_o ed uno smorzatore di costante viscosa β_2 . Infine, sul sistema agisce una forza F generata da un opportuno attuatore, applicata in corrispondenza del punto A. La dinamica che descrive il moto delle due aste rispetto all'angolo θ (vedi figura 1) risulta descritta da

$$J_{eq}\ddot{\theta} + \ell^2 [\beta_1 \sin^2 \theta + 4\beta_2 \cos^2 \theta] \dot{\theta} + k_1 \ell^2 \sin \theta [1 - \cos \theta] + 2k_2 \ell \cos \theta [2\ell \sin \theta - \ell_o] - mg\ell \sin \theta = -F\ell \sin \theta,$$

dove $J_{eq} = 2J + \frac{1}{2}m\ell^2 = \frac{2}{3}m\ell^2$.

- A** Si determini il valore della costante elastica k_1 che consente al sistema di rimanere in equilibrio con $\bar{\theta} = \pi/2$ e per un generico valore costante \bar{F} della forza esterna applicata in corrispondenza del punto A;
- B** Supponendo di disporre della misura della posizione angolare θ e di controllare la forza F applicata in corrispondenza del punto A, si determini una rappresentazione del sistema in forma di stato, in forma simbolica, intorno all'equilibrio corrispondente a $\bar{\theta} = \pi/2$. Si fornisca inoltre la f.d.t. $G_M(s)$ tra F e θ del sistema linearizzato;
- C** Si discuta la stabilità del sistema linearizzato nell'intorno dell'equilibrio corrispondente a $\bar{\theta} = \pi/2$. In particolare, si discuta il ruolo giocato dalle due molle nel determinare la stabilità del sistema al variare di ℓ_o .

Supponiamo adesso di attuare il sistema meccanico di figura 1, ovvero di generare la forza F in corrispondenza del punto A, per mezzo di un attuatore elettromagnetico come rappresentato in figura 1. La dinamica di tale attuatore risulta

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v$$

con uscita nonlineare data da:

$$F = K_m \frac{i^2}{\ell^2 (1 + \cos \theta)^2}.$$

D Si determini il valore della corrente \bar{I} e della forza di attuazione \bar{F} corrispondente a $v = \bar{V}$ e $\bar{\theta} = \pi/2$, e si linearizzi il sistema attuatore nell'intorno di tale equilibrio. Si forniscano inoltre le f.d.t. $G_v(s)$ tra v e F , e $G_\theta(s)$ tra θ e F del sistema linearizzato;

E Si disegni lo schema a blocchi dell'interconnessione tra il sistema meccanico e l'attuatore e si fornisca la funzione di trasferimento complessiva tra v tensione di alimentazione dell'attuatore e θ , uscita misurata;

Si considerino i seguenti valori numerici: $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $m = 5 \text{ Kg}$, $\ell = 1 \text{ m}$, $\ell_o = 4 \text{ m}$, $k_2 = 10 \text{ N/m}$, $\beta_1 = \beta_2 = 5 \text{ Ns/m}$, $R = 2 \Omega$, $L = 0.05 \text{ H}$, $K_m = 5 \text{ Nm}^2/\text{A}^2$, $\bar{V} = 0.1 \text{ V}$.

F Si determini una legge di controllo per la tensione v di alimentazione dell'attuatore tale che la posizione angolare θ , a partire dalla condizione iniziale $\theta_o = \pi/3$, raggiunga esattamente il valore di equilibrio $\bar{\theta}$, senza mai eccedere il valore $\hat{\theta} = \frac{31}{60}\pi$ con tempo di assestamento al 2% non superiore a 67 ms ;

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

Soluzione

A Il sistema è descritto da due variabili di stato $\theta, \dot{\theta}$. Essendo l'equilibrio caratterizzato dalla posizione angolare θ della testina costante e pari al valore $\bar{\theta} = \pi/2$, si ricava che $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Sostituendo tali valori nelle equazioni dinamiche e considerando una generica forza costante \bar{F} applicata in A, si ottiene la seguente equazione algebrica

$$k_1 \ell^2 - mg\ell = -\bar{F}\ell,$$

da cui,

$$k_1 = \frac{mg}{\ell} - \frac{\bar{F}}{\ell}.$$

B Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2]^T = [\theta - \bar{\theta}, \dot{\theta}]^T$ le variabili di stato del sistema traslato e con $\tilde{u} = F - \bar{F}$ l'ingresso traslato, si ottiene il seguente sistema non lineare in forma di stato traslato nell'equilibrio corrispondente a $\bar{\theta} = \pi/2$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -\frac{1}{J_{eq}} \left\{ \ell^2 [\beta_1 \sin^2(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) + 4\beta_2 \cos^2(\tilde{x}_1 + \bar{\theta})] \tilde{x}_2 + k_1 \ell^2 \sin(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) [1 - \cos(\tilde{x}_1 + \bar{\theta})] + \right. \\ \left. + 2k_2 \ell \cos(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) [2\ell \sin(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) - \ell_o] \right\} + \frac{mg\ell}{J_{eq}} \sin(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) - \frac{F\ell}{J_{eq}} \sin(\tilde{x}_1 + \bar{\theta}) . \end{cases}$$

che in forma matriciale diviene

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \end{bmatrix} \tilde{u},$$

dove,

$$\begin{aligned} a_{21} &= -\frac{1}{J_{eq}} [\ell^2 k_1 + k_2 (2\ell\ell_o - 4\ell^2)] \\ a_{22} &= -\frac{1}{J_{eq}} \beta_1 \ell^2 \\ b_{21} &= -\frac{\ell}{J_{eq}} . \end{aligned}$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la posizione angolare x_1 , si ottiene

$$\tilde{y} = C\tilde{x} = [1 \quad 0] \tilde{x}.$$

La funzione di trasferimento $G_M(s)$ tra la forza F di attuazione e l'uscita misurata θ risulta

$$G_M(s) = -\frac{\ell}{J_{eq} s^2 + \beta_1 \ell^2 s + \ell^2 k_1 + k_2 (2\ell\ell_o - 4\ell^2)}$$

C Essendo il sistema del secondo ordine con matrice dinamica in forma canonica di controllabilità si può applicare la regola di Cartesio. Per la stabilità del sistema deve valere che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_{eq}} \beta_1 \ell^2 &> 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} [\ell^2 k_1 + k_2 (2\ell\ell_o - 4\ell^2)] &> 0, \end{aligned}$$

con $k_1 = \frac{mg}{\ell} - \frac{\bar{F}}{\ell}$. Poichè la prima disequazione risulta sempre verificata, essendo i parametri sempre positivi, lo studio della stabilità può essere ridotto allo studio della seconda disequazione, ovvero il termine di richiamo elastico complessivo. Questo termine è composto da un contributo stabilizzante della molla verticale e di uno potenzialmente instabilizzante dovuto al precarico (lunghezza a riposo ℓ_o) della molla orizzontale. In particolare la molla orizzontale genererà un contributo instabilizzante qualora

$$k_2 (2\ell\ell_o - 4\ell^2) < 0.$$

Fisicamente l'effetto instabilizzante della molla orizzontale deriva dal fatto di essere pretensionata nella posizione di equilibrio. Se la molla ha una lunghezza a riposo minore di 2ℓ , nella configurazione con molla orizzontale risulterà estesa ed eserciterà delle forze interne sulle aste che tenderanno ad avvicinare le estremità delle aste stesse, allontanandole dalla posizione di equilibrio statico in caso di un piccolo scostamento dalla posizione orizzontale. Se la molla orizzontale avesse lunghezza a riposo 2ℓ non eserciterebbe nessuna azione interna sul sistema perchè nella configurazione di equilibrio risulterebbe indeformata; se, infine, la molla avesse una lunghezza a riposo maggiore di 2ℓ risulterebbe montata compressa nella posizione di equilibrio e tenderebbe pertanto ad allontanare gli estremi delle aste, incrementando la stabilità del sistema. La presenza della molla verticale conferisce una maggiore stabilità al sistema consentendo di avere comunque stabilità anche se la molla orizzontale ha una lunghezza a riposo minore di 2ℓ ; in altri termini l'effetto instabilizzante generato dalla molla orizzontale può essere compensato da quello stabilizzante della molla verticale. La lunghezza statica della molla orizzontale minima per avere stabilità si ottiene con

$$\ell_o \geq 2\ell - \frac{\ell k_1}{2 k_2}.$$

D All'equilibrio, cioè quando la tensione di alimentazione è costante e pari a \bar{V} , la variazione di corrente nel circuito elettrico è nulla. Di conseguenza, sostituendo $\bar{\theta} = \pi/2$, si ottengono le seguenti espressioni per \bar{I} e \bar{F} :

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{\bar{V}}{R} \\ \bar{F} &= K_m \frac{\bar{V}^2}{R^2 \ell^2}.\end{aligned}$$

Definendo con $\tilde{x}_3 = i - \bar{I}$ la variazione della corrente rispetto al valore di equilibrio, con $\tilde{u}_v = v - \bar{V}$ la variazione dell'ingresso controllabile e con $\tilde{u}_\theta = \theta - \bar{\theta}$ la variazione dell'ingresso non controllabile coincidente con l'uscita del sistema meccanico, si ottiene il seguente sistema lineare traslato

$$\dot{\tilde{x}}_3 = -\frac{R}{L} (\tilde{x}_3 + \bar{I}) + \frac{\tilde{u}_v + \bar{V}}{L}$$

con uscita non lineare traslata

$$\tilde{F} = F - \bar{F} = K_m \frac{(\tilde{x}_3 + \bar{I})^2}{\ell^2 (1 + \cos(\tilde{u}_\theta + \bar{\theta}))^2}.$$

Il corrispondente linearizzato diventa

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} = -\frac{R}{L}\tilde{x}_3 + \begin{bmatrix} 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_v \\ \tilde{u}_\theta \end{bmatrix}$$

con uscita linearizzata attorno all'equilibrio data da:

$$\tilde{F} = \frac{2K_m\bar{I}}{\ell^2}\tilde{x}_3 + \begin{bmatrix} 0 & \frac{2K_m\bar{I}^2}{\ell^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_v \\ \tilde{u}_\theta \end{bmatrix}$$

Le f.d.t. tra l'unica uscita \tilde{F} e i due ingressi u_v e u_θ risulta

$$F(s) = \frac{2K_m\bar{I}}{\ell^2 L} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} U_v(s) + \frac{2K_m\bar{I}^2}{\ell^2} U_\theta(s) = G_v(s) U_v(s) + G_\theta(s) U_\theta(s).$$

E Lo schema a blocchi relativo al complessivo sistema meccanico e attuatore elettromagnetico è riportato in figura 2, mentre la f.d.t. complessiva tra la tensione di ingresso all'attuatore e la variabile di uscita θ è

$$G(s) = \frac{G_M(s)G_v(s)}{1 - G_M(s)G_\theta(s)} = -\frac{2\bar{I}K_m}{(J\ell s^2 + \ell^3\beta_1 s + \ell^3k_1 + 2\ell^2\ell_o k_2 - 4\ell^3k_2 + 2K_m\bar{I}^2)(sL + R)}$$

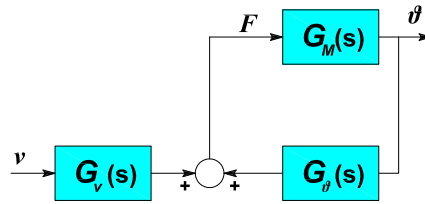


Figure 2: Schema a blocchi relativo al complessivo sistema meccanico e attuatore elettromagnetico.

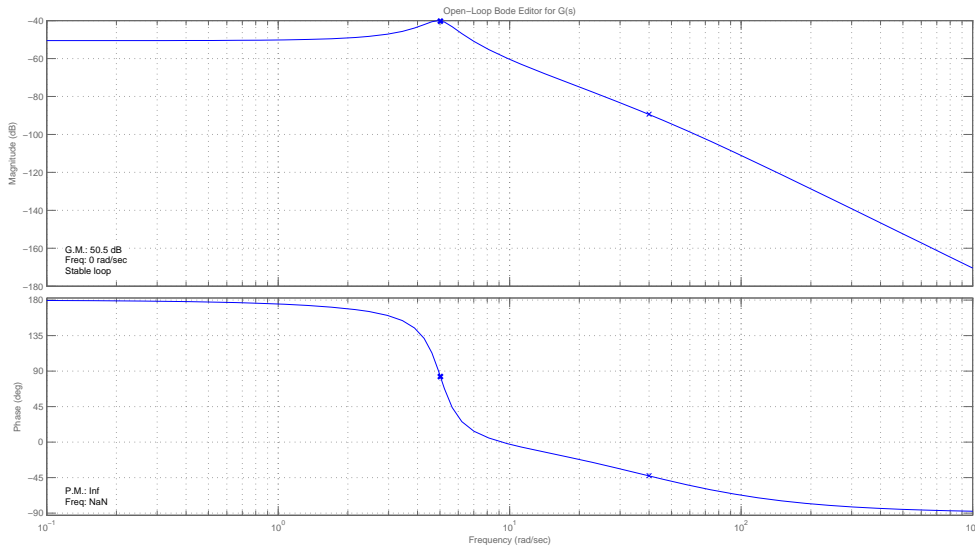


Figure 3: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)$.

F Sostituendo i valori numerici assegnati, la f.d.t. $G(s)$ complessiva risulta,

$$G(s) = -\frac{3}{s^3 + 41.5s^2 + 85.2s + 1009},$$

il cui diagramma di Bode è riportato in figura 3.

Avendo a disposizione una f.d.t. asintoticamente stabile è possibile procedere con la ricerca di un controllore $C(s)$, il cui progetto può essere affrontato sui diagrammi di Bode, in grado di soddisfare le specifiche richieste.

A tal proposito si consideri un prototipo di controllore del tipo

$$C(s) = \frac{k_c}{s^t} \hat{C}_0(s), \text{ con } \hat{C}_0(0) = 1,$$

ed iniziamo con la scelta del *tipo* t e della costante di guadagno k_c del controllore basandoci sulle specifiche statiche. La specifica in tal caso richiede un errore nullo a regime, cioè le due aste devono raggiungere esattamente la configurazione con $\theta = \bar{\theta}$. Per tale motivo, poichè $G(s)$ non possiede poli nell'origine, è necessario porre $t = 1$ nel controllore. La costante k_c sarà aggiustata successivamente per rispettare la specifica sulla banda passante.

La seconda parte della specifica richiede un tempo di assestamento T_a al 2% inferiore a 67 ms ammettendo una sovraelongazione massima pari a:

$$S\% = \frac{\theta_{max} - \bar{\theta}}{\bar{\theta} - \theta_o} = 10\%.$$

Si può procedere quindi al progetto di un controllore capace di rendere la f.d.t. in anello chiuso ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti per il quale le specifiche si traducono come

segue:

$$S_{\%} < 10\% \quad \Rightarrow \quad \delta > 0.6 \quad \Rightarrow \quad MF > 60^\circ$$

$$\omega_T > \frac{4}{\delta T_a} = 100 \text{ rad/s}.$$

La figura 4 mostra il diagramma di Bode di $G(s)/s$ con specifica sulla banda passante.

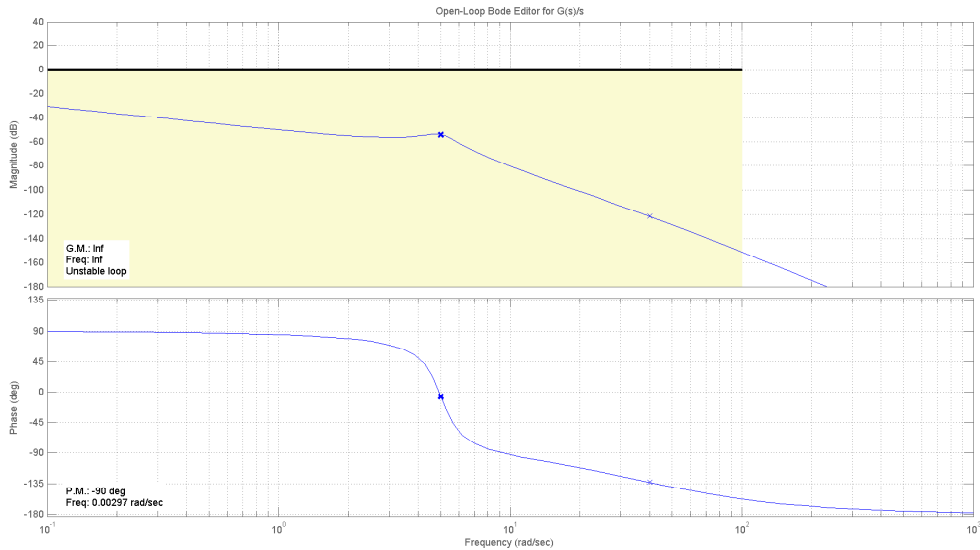


Figure 4: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)/s$ con specifica sulla banda passante.

Un controllore capace di rispettare tutte le specifiche compresa quella sulla causalità è il seguente:

$$C(s) = -\frac{125285870.13(s + 38.92)(s^2 + 1.81s + 22.75)}{s(s + 9307)(s + 275)}.$$

Il controllore presenta un polo nell'origine necessario per garantire errore nullo a regime, due zeri complessi coniugati per cancellare i corrispondenti poli del sistema da controllare, una rete anticipatrice reale in prossimità della pulsazione di taglio al fine di alzare il margine di fase in tale zona ed infine un polo reale in alta frequenza per garantire la fisica realizzabilità. In figura 5 mostra il diagramma di Bode della f.d.t. in anello aperto $C(s)G(s)$ con relative specifiche.

La f.d.t. in anello chiuso è

$$G_c(s) = \frac{375857610.4(s + 38.92)(s^2 + 1.81s + 22.75)}{(s + 9311)(s + 38.6)(s^2 + 1.83s + 22.8)(s^2 + 271.6s + 4.06 \cdot 10^4)}.$$

La risposta al gradino è riportata in figura 6.

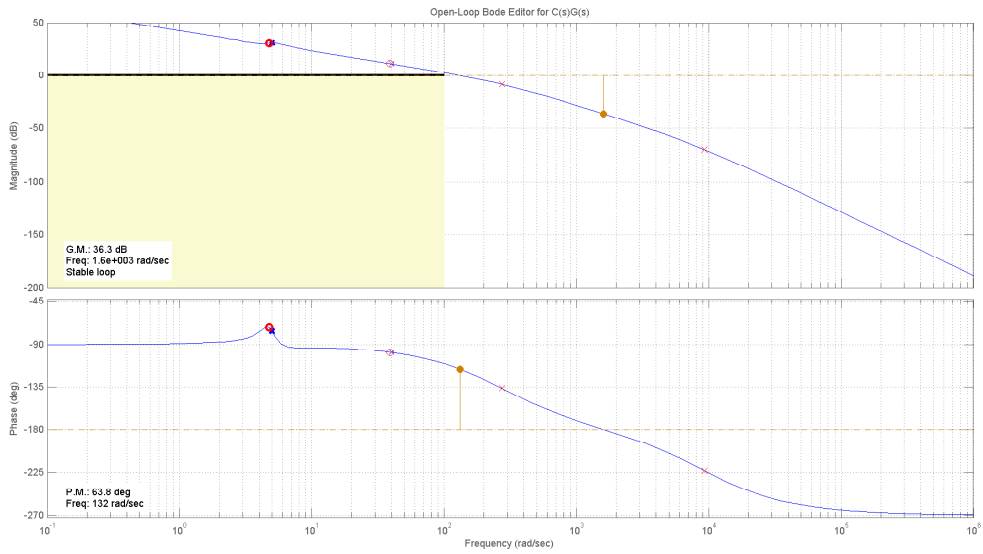


Figure 5: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$ con specifiche da rispettare.

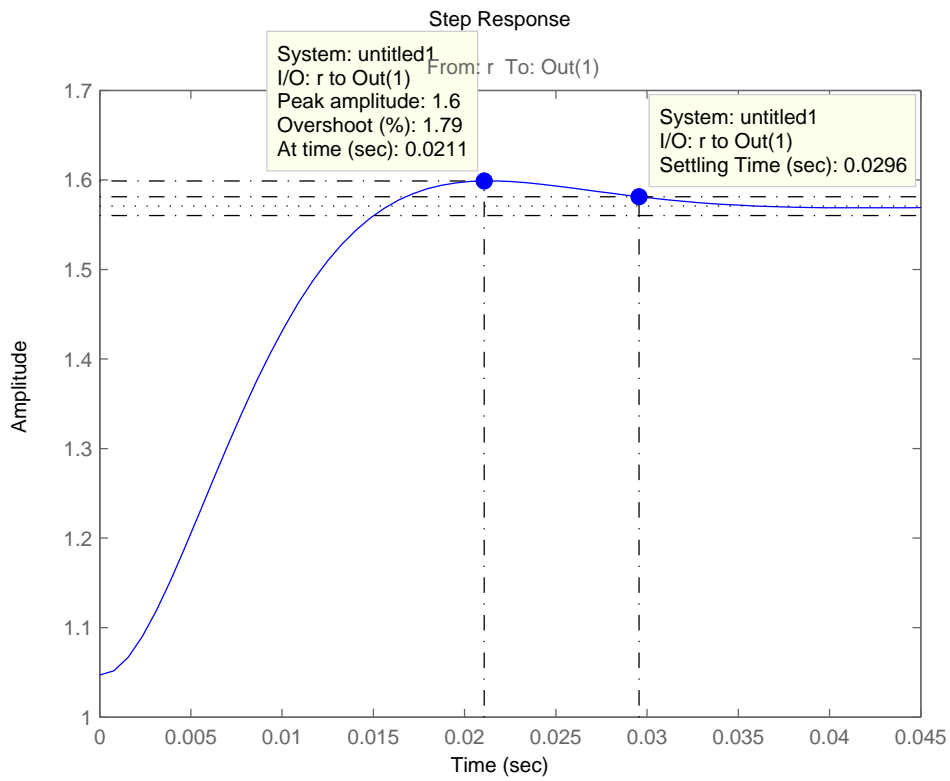


Figure 6: Risposta al gradino del sistema controllato.