

**Esercizio 1.**

Si consideri il sistema rappresentato in figura 1, costituito da un nastro trasportatore attuato il cui scopo è riempire un serbatoio.

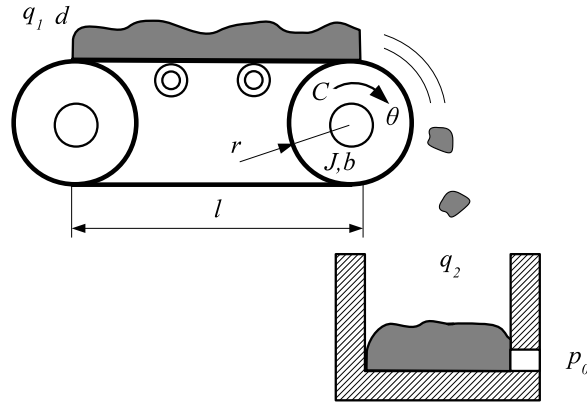


Figura 1: Schema del sistema meccanico.

Le equazioni che descrivono la dinamica del sistema sono

$$\begin{aligned} (J + q_1 d r^2) \ddot{\theta} + b \dot{\theta} &= C \\ \dot{q}_2 &= \frac{r}{l} q_1 \dot{\theta} - p_o + p_{o,d} \end{aligned} \quad (1)$$

dove  $J$  rappresenta l'inerzia del motore,  $q_1$  il volume di materiale trasportato dal nastro,  $d$  la densità del materiale,  $r$  il raggio della puleggia motrice,  $\theta$  la posizione angolare del motore,  $b$  il coefficiente di smorzamento del motore,  $C$  la coppia esercitata dal motore,  $q_2$  il volume di materiale presente all'interno del serbatoio,  $l$  la lunghezza del nastro,  $p_o$  la portata volumica media alla quale il serbatoio viene svuotato.

Si considerino i seguenti valori numerici:  $J = 0.5 \text{ Kg m}^2$ ;  $q_1 = 1 \text{ m}^3$ ;  $d = 100 \text{ Kg/m}^3$ ;  $r = 0.3 \text{ m}$ ;  $l = 10 \text{ m}$ ;  $b = 1 \text{ N m s/rad}$ .

- A) Si determini il moto nominale caratterizzato da  $p_o = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$  e  $p_{o,d} = 0 \text{ m}^3/\text{s}$  e si riporti una opportuna rappresentazione del sistema in forma di stato in un intorno di tale moto nominale;
- B) si determini la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $u = C$  e uscita  $y = q_2$  e tra disturbo  $p_{o,d}$  e uscita  $y = q_2$  considerando il sistema traslato determinato al punto precedente. Si discuta la stabilità del sistema, motivando la risposta;
- C) considerando che il serbatoio abbia una capienza di  $1 \text{ m}^3$  e che sia inizialmente vuoto si determini una legge di controllo per  $u$  che agisca in modo da garantire che
  - C.1) si raggiunga il 98% della capienza massima del serbatoio in un tempo non superiore a 25 s e non si superi mai la capienza massima del serbatoio stesso;
  - C.2) un rumore di misura del tipo  $\nu = \sin(\omega t)$  per  $\omega \geq 12 \text{ rad/s}$  non produca un'effetto sull'uscita maggiore del 1%;
  - C.3) gli effetti di un disturbo periodico  $p_{o,d} = D \sin(\omega t)$  con  $\omega \leq 10^{-2} \text{ rad/s}$  e  $D = 0.001 \text{ m}^3/\text{s}$  non produca variazioni del volume superiori al 1% del valore di regime

Si riportino i diagrammi di Bode utilizzati per il progetto con le relative specifiche da rispettare, il controllore ottenuto motivandone il progetto, e la risposta al gradino ottenuta riportando le caratteristiche più significative.

- D.1) Si descrivano le istruzioni di un programma per elaboratore digitale che simuli la dinamica del sistema lineare (1) partendo dalle condizioni iniziali calcolate al punto A con  $u = \bar{u}$  costante.
- D.2) Si determini un opportuno tempo di campionamento nel programma di cui al punto precedente motivandone la scelta.

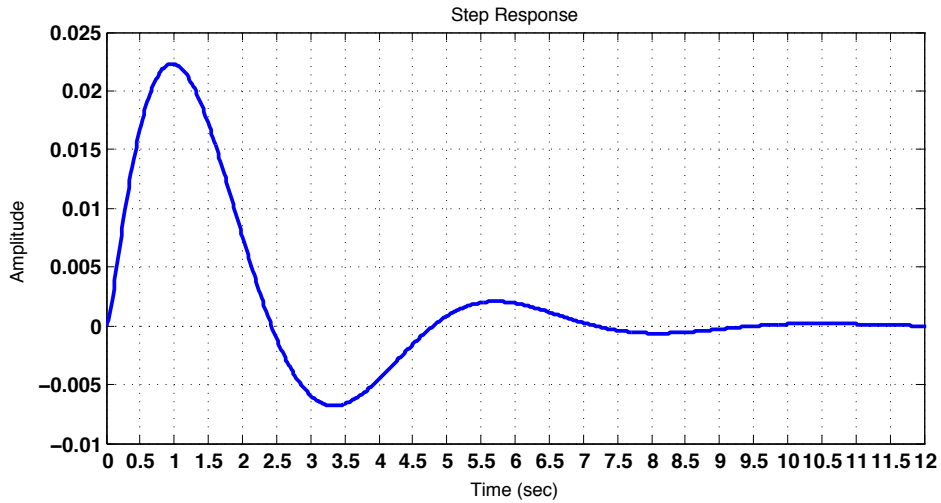


Figura 2: Risposta ad un ingresso a gradino unitario di un sistema lineare tempo invariante.

**Esercizio 2.**

Si consideri la risposta ad un ingresso a gradino unitario di un sistema lineare tempo-invariante riportata in figura 2.

La risposta in esame possiede, tra le altre, le seguenti caratteristiche:

- $y(0) = 0$
- $\dot{y}(0) = 0$
- $\ddot{y}(0) > 0$

E) Basandosi sulle informazioni fornite e su quelle che possono essere desunte dalla figura 2, si determini una possibile funzione di trasferimento di un sistema lineare tempo continuo tempo invariante che presenti una risposta ad un ingresso a gradino unitario del tipo di quella riportata in figura 2, motivandone la risposta.

## Soluzione

A) Il sistema può essere descritto dalle seguenti variabili di stato  $x = [\theta, \dot{\theta}, q_2]^T$ . Nel punto di funzionamento a regime  $x_r$ , caratterizzato da  $p_o = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ , si ha:

$$\dot{\theta}_r = \frac{lp_o}{rq_1},$$

$$\tau_r = b \frac{lp_o}{rq_1},$$

con  $\theta_r = \dot{\theta}_r t$ . Indicando con  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3]^T = [\theta - \dot{\theta}_r t, \dot{\theta} - \dot{\theta}_r, q_2]^T$  il vettore delle variabili traslate in corrispondenza del moto nominale, con  $\tilde{u} = \tau - \tau_r$  il relativo controllo traslato, e con  $\tilde{d} = p_{o,d} - p_o$  il disturbo anch'esso traslato, il sistema, già lineare, può essere posto nella seguente forma di stato:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_u\tilde{u} + B_{p_{o,d}}\tilde{p}_{o,d}, \quad (2)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-b}{dq_1 r^2 + J} & 0 \\ 0 & \frac{q_1 r}{l} & 0 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ dq_1 r^2 + J \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

Sostituendo i valori numerici assegnati, si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1053 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1053 \\ 0 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

B) La funzione di trasferimento in forma simbolica tra l'ingresso  $\tilde{u}$  e l'uscita  $y$  diviene

$$G_u(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{q_1 r}{ls((dq_1 r + J)s + b)},$$

e sostituendo i valori numerici si ottiene

$$G_u(s) = \frac{0.003}{s(s + 0.105)}. \quad (3)$$

La funzione di trasferimento presenta un polo reale negativo ( $p_1 = -\frac{b}{(dq_1 r + J)} \approx -0.105$ ) e un polo nell'origine. Il sistema è perciò marginalmente stabile.

Infine, la funzione di trasferimento in forma simbolica tra il disturbo  $\tilde{d}$  e l'uscita  $y$  diviene

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}B_{p_{o,d}} = \frac{1}{s}.$$

C) Siccome il sistema in anello aperto risulta essere stabile si può procedere direttamente con il progetto di un controllore del tipo

$$C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

in grado di soddisfare le specifiche.

**C.1)** Per rispettare la prima specifica si tenta di far sì che il sistema controllato in ciclo chiuso presenti un comportamento del tipo ad un polo dominante in quanto il sistema non può tollerare sovralongazioni. La pulsazione di taglio richiesta è data da

$$\omega_T \approx \frac{4}{T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 0.16 \text{ rad/s}.$$

Per rispettare tale specifica il diagramma di Bode del modulo di  $C(j\omega)G(j\omega)$  (riportato in figura 3) dovrebbe idealmente attraversare l'asse a 0 dB con pendenza pari a -1 oltre  $\omega_T$  con margine di fase circa uguale a  $\pi/2$ .

**C.2)** L'effetto del disturbo di misura  $\nu$  sulla uscita è dato dalla

$$y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}\nu(s).$$

Per rispettare questa specifica è possibile imporre che per frequenze superiori a  $\bar{\omega} = 12$  rad/s sia rispettata la condizione

$$N \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \leq Y \quad (4)$$

dove  $N = 1$  rappresenta l'ampiezza del disturbo, e  $Y = 0.01$  l'errore ammissibile in uscita. Assumendo che, nel campo di frequenze considerato si abbia  $|C(j\omega)G(j\omega)| \ll 1$ , la (4) può essere semplificata in

$$C(s)G(s) \leq Y/N \approx -40 \text{ dB}. \quad (5)$$

Questo si traduce sui diagrammi di Bode richiedendo che il modulo di  $C(j\omega)G(j\omega)$  (riportato in figura 3) sia inferiore a circa  $-40$  dB per frequenze superiori a  $12$  rad/s.

**C.3)** Supponendo che il sistema controllato in ciclo chiuso sia asintoticamente stabile è possibile applicare il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento tra il disturbo  $d$  e l'uscita  $y$  del sistema è

$$Y = \frac{G_d(s)}{1 + C(s)G_u(s)}d(s) = \bar{G}(s)d(s). \quad (6)$$

Applicando, quindi, il teorema della risposta armonica si ha che

$$y(t) = |\bar{G}|D \sin(\omega t + \angle \bar{G}), \quad (7)$$

e facendo riferimento al caso peggiore, ovvero imponendo cautelativamente che  $\sin(\omega t + \angle \bar{G}) = 1$ , la specifica richiede che, per pulsazioni  $\omega \leq 10^{-2}$  rad/s, si abbia  $|y(t)| < 5$ , e può essere soddisfatta ponendo

$$|\bar{G}| = \frac{|G_d|}{|1 + CG|} \leq 0.01/D. \quad (8)$$

Calcolando i reciproci di entrambi i membri e trascurando 1 poichè a basse frequenze  $|C(s)G(s)| \gg 1$  si ha

$$|G(s)C(s)| \geq \frac{0.001}{0.01}|G_d(s)|, \quad s = j\omega, \quad \omega \leq 10^{-2} \text{ rad/s} \quad (9)$$

Quindi, considerando che il diagramma del modulo della f.d.t. del disturbo è rappresentato da una retta inclinata di  $-20$  dB / dec che attraversa l'asse delle ascisse per  $\omega = 1$  rad / s, la specifica può essere visualizzata sul diagramma del modulo di  $C(s)G(s)$  come la semiretta di cui sopra, traslata verso il basso di  $20$  dB, per frequenze inferiori a  $10^{-2}$  rad / s.

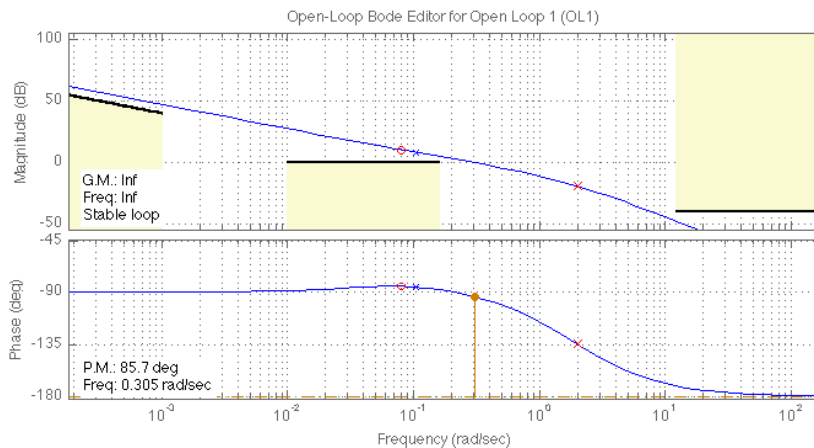


Figura 3: Diagramma di Bode del modulo e della fase di  $C(s)G(s)$  con le relative specifiche

## Progetto del controllore

Al fine di rispettare le specifiche sulla pulsazione di taglio e sul disturbo in bassa frequenza, è necessario in primo luogo alzare il diagramma delle ampiezze aumentando il guadagno del controllore. Così facendo, la pendenza con cui il diagramma taglia l'asse a 0 dB risulterebbe pari a -2. Per tagliare correttamente, è opportuno inserire uno zero ( $z_c = -0.08$ ) poco prima del corrispondente polo del sistema. Il controllore così ottenuto, oltre a non essere causale, non rispetta ne la specifica sul margine di fase ne quella sul rumore di misura. Per rispettare tutte le specifiche, è sufficiente inserire un polo ( $p_c = -2$ ) circa una decade dopo la  $\omega_T$ . Così facendo si realizza una rete attenuatrice

$$C(s) = K_c C_0(s) = 8 \frac{1 + 12s}{1 + 0.5s}.$$

La risposta a gradino del sistema in retroazione è riportata in figura 4. Si noti che con il controllore

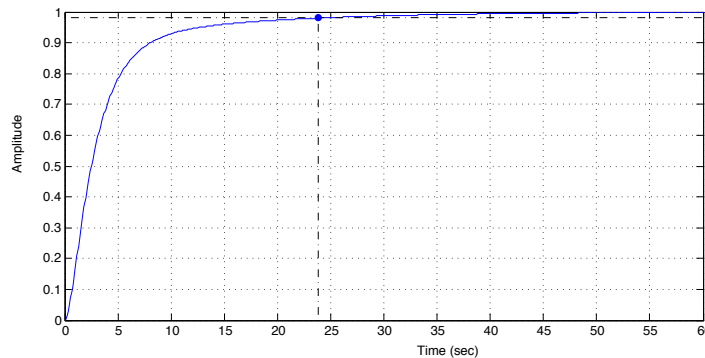


Figura 4: Risposta del sistema retroazionato ad un ingresso a gradino unitario.

richiede un valore massimo della coppia di circa 170N m.

- D.1)** Si consideri il sistema in forma di stato (2). Utilizzando il metodo di Eulero in avanti  $\dot{x} \approx (x(k+1) - x(k))/T$  (dove  $T$  rappresenta il tempo di campionamento) si può scrivere il seguente sistema (utilizzato nel programma riportato successivamente come legge di aggiornamento degli stati):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (I + TA)x(k) + TBU(k) = A_d x(k) + B_d u(k) \\ y(k+1) &= TCx(k) = C_d x(k) \end{aligned} \quad (10)$$

dove

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 - T \frac{b}{dq_1 r^2 + J} & 0 \\ 0 & T \frac{q_1 r}{l} & 1 \end{bmatrix}, B_d = \begin{bmatrix} 0 & T & 0 \end{bmatrix}^T, C_d = [0 \quad 0 \quad T]. \quad (11)$$

Il sistema può essere simulato con il seguente programma

```
%costanti
T=0.001; %scelta del tempo T
J = , q_1 = , r = , d = , l = , b = , po = , c = , k = ; %parametri del sistema
A_d = , B_d = C_d = ; %dinamica TD
%condizioni iniziali
x = [x_1_0, x_2_0, x_3_0]

% ciclo indefinito fino ad interruzione
while(condizione_arresto == 'false')

%salvataggio stati
write x

y= C_d*x; %l'uscita è la prima componente del vettore degli stati
```

```

% Scrivi il valore di uscita y sulla porta "output"
write(y,output);

% Aggiorna lo stato
x=A_d*x + B_d*u;
end

```

**D.2)** Il tempo di campionamento deve essere scelto in modo da non pregiudicare la stabilità del sistema tempo discreto che sarà effettivamente utilizzato per la simulazione. Questa può essere assicurata scegliendo un tempo di campionamento tale per cui gli autovalori della matrice  $A_d$  siano tutti con modulo inferiore all'unità. Gli autovalori della matrice, riportata in (11), risultano

$$\text{eig}(A_d) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 - \frac{bT}{dq_1 r^2 + J} \end{bmatrix} \quad (12)$$

quindi deve essere rispettata la seguente condizione

$$0 \leq \frac{bT}{dq_1 r^2 + J} \leq 2. \quad (13)$$

Sostituendo i valori numerici si ha che il tempo di campionamento non deve essere maggiore di 20 s.

### Esercizio 2.

**E)** Dai valori della risposta e delle sue derivate prima e seconda per  $t = 0$  si deduce, per il teorema del valore iniziale, che il grado relativo (l'eccesso poli-zeri) della funzione di trasferimento è 2.

Dal grafico si desume che per  $t \rightarrow \infty$  la risposta tende a 0 quindi, per il teorema del valore finale, si può dedurre la presenza di uno zero nell'origine. Supponendo che non siano presenti altri zeri oltre a quello nell'origine, per quanto osservato precedentemente si ha che il numero di poli è 3.

Dal comportamento oscillante della risposta si evince che due poli sono complessi e coniugati, a parte reale negativa (altrimenti la risposta non convergerebbe ad un valore costante) e il terzo deve essere reale negativo. Siccome il periodo dell'oscillazione (circa 4.8) si mantiene praticamente costante (comportamento del tipo a 2 poli dominanti) è ragionevole assumere che il polo reale si trovi a frequenza molto superiore a quella dei poli complessi.

Sulla base di queste argomentazioni e basandosi su sovralongazione e tempo di assestamento desumibili dal grafico è possibile valutare approssimativamente i poli complessi e coniugati e per tentativi il polo reale.

La funzione di trasferimento che ha generato la risposta riportata in figura 2 è:

$$G(S) = \frac{s}{(s^2 + s + 2)(s + 20)}.$$