

Esame di Controlli Automatici – 12 settembre 2012

Esercizio A

Si consideri il modello monotraccia di un'automobile rappresentato in figura 1(a). Il modello considerato rappresenta un veicolo a trazione posteriore con sterzo sull'anteriore, che si muove a velocità  $u$  costante con piccoli angoli di deriva (ovvero gli angoli formati tra le ruote e il vettore velocità di punti di contatto ruota-asfalto).

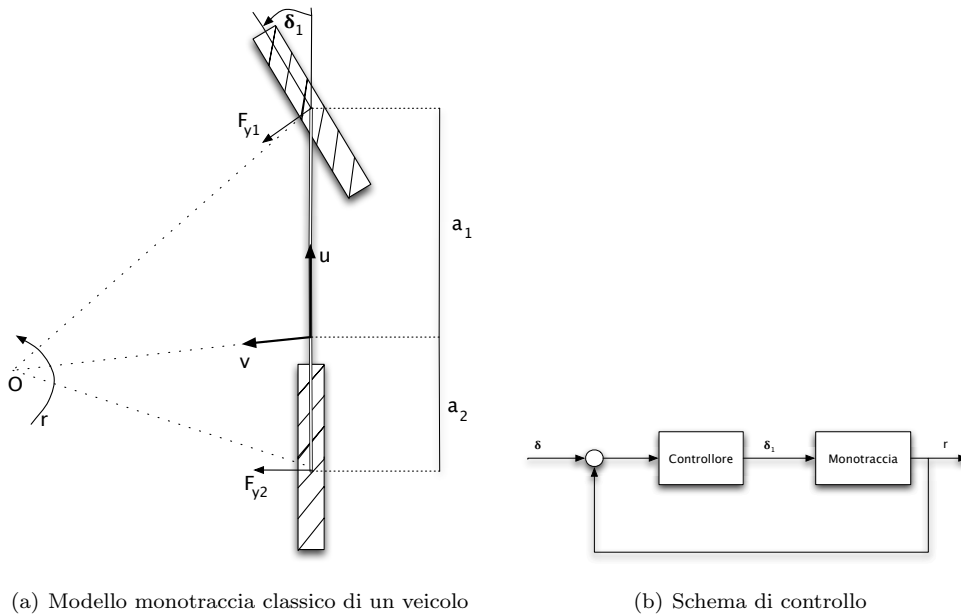


Figura 1: Modello meccanico e schema di controllo

Sotto opportune ipotesi semplificative, le equazioni che governano il sistema rappresentato in figura 1(a) sono:

$$\begin{cases} m(\dot{v} + ur) = F_{y1} + F_{y2} \\ J\dot{r} = F_{y1}a_1 - F_{y2}a_2 \end{cases}$$

dove

$$\begin{cases} \alpha_1 = \delta_1 - \frac{v+ra_1}{u} \\ \alpha_2 = \frac{ra_2-v}{u} \end{cases}$$

sono gli angoli di deriva. Nelle equazioni,  $a_1$  e  $a_2$  sono le distanze tra il baricentro del veicolo e il punto di contatto ruota-asfalto rispettivamente dell'assale anteriore e posteriore. La massa del veicolo e il suo momento di inerzia rispetto all'imbardata sono indicati rispettivamente con  $m$  e  $J$ . Il veicolo è, in generale, in rotazione attorno a un punto ( $O$  in figura) con velocità angolare  $r$  (imbardata) e la sua velocità lineare ha una componente longitudinale  $u$  e una componente centripeta  $v$  (si noti che  $v$  non è necessariamente ortogonale a  $u$ ).  $\delta_1$  è l'angolo di sterzo. Il veicolo scambia con l'asfalto le due forze laterali  $F_{y1}$  e  $F_{y2}$ , che dipendono, rispettivamente, da  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Il modello usato per descrivere tali forze di contatto è:

$$F(\alpha) = D \sin(C \arctan(B\alpha)),$$

che è una versione semplificata della *Magic Formula*, o formula di Pacejka. Si consideri infine  $\delta_1$  come variabile di controllo ed  $r$  come uscita del sistema.

Il sistema linearizzato attorno all'equilibrio corrispondente a  $v = r = \delta_1 = 0$  risulta essere:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2\frac{BCD}{um} & -u + (a_2 - a_1)\frac{BCD}{um} \\ (a_2 - a_1)\frac{BCD}{uJ} & -(a_1^2 + a_2^2)\frac{BCD}{uJ} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{BCD}{m} \\ a_1\frac{BCD}{J} \end{pmatrix} \delta_1,$$

dove  $x = [v \ r]^T$ .

Si considerino i seguenti valori numerici per i parametri  $a_1 = 0.9m$ ,  $a_2 = 0.6m$ ,  $m = 1500kg$ ,  $J = 1300kg \cdot m^2$ ,  $u = 16\frac{m}{s}$ ; per la formula di Pacejka  $B = 7.5$ ,  $C = 1.6$ ,  $D = 2500N$ .

**A.1)** Si supponga di voler controllare il sistema in anello aperto con un'azione di controllo  $\delta_1$  pre-pianificata. Si vuole calcolare una funzione di ingresso  $\delta_1(t)$  che, a partire da una configurazione iniziale  $x(0)$ , porti il sistema lineare tempo continuo esattamente alla configurazione desiderata  $x_d(T) = [0, 0]^T$  in un tempo  $T$  e sia in grado di mantenerla per un tempo indefinito. A tal fine si usi un ingresso costante a tratti per  $N$  intervalli temporali di durata  $T_s = \frac{T}{N}$ , e si usi un modello a tempo discreto del sistema.

**A.1a)** Si discuta il minimo valore di  $N$  che garantisce una soluzione e si calcoli la corrispondente sequenza di controllo  $\delta_1$  che, a partire da  $x(0) = [v(0), r(0)]^T = [0.5, -0.1]^T$  porti il sistema in  $x_d(T)$ . A tal proposito, si utilizzi un tempo di campionamento  $T_s = 0.01$ s. Si effettui poi una simulazione del sistema lineare tempo continuo con la sequenza di controllo appena progettata in ambiente **Simulink**;

**A.1b)** Si consideri adesso il seguente vincolo sui valori ammissibili dal controllo:  $|\delta_1| \leq 0.25$ rad. Utilizzando lo stesso tempo di campionamento  $T_s$  di cui al punto precedente, si progetti una nuova legge di controllo che porti il sistema nella configurazione desiderata in un tempo  $T$  opportunamente scelto, e che sia in grado di mantenere il sistema in tale configurazione per un tempo infinito. Si valuti poi il costo del controllo  $J = \sum_{i=1}^N T_s \delta_1(iT_s)^2$ .

**A.1c)** Con riferimento al punto precedente, si progetti una nuova legge di controllo che, a parità di  $T = T_s N$  e pur rispettando lo stesso vincolo sui valori ammissibili per il controllo  $\delta_1$ , abbia un costo inferiore (si utilizzi lo stesso indice di costo  $J$  di cui al punto precedente per la verifica).

**A.2)** Si progetti un controllore basato su regolatore che per mezzo dell'angolo di sterzo  $\delta_1$ , stabilizzi il sistema linearizzato.

**A.3)** Considerando lo schema di controllo di figura 1(b), con riferimento  $\delta = 0$ , si simuli il comportamento sia del sistema linearizzato che del sistema non lineare in ambiente **Simulink**.

## Esercizio B

Si consideri il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - (1 - x_2^2)(x_1 + 2x_2). \end{cases}$$

Si determinino gli equilibri del sistema e se ne studino le proprietà di stabilità.

## Soluzione

### Esercizio A

**A.1a)** Il sistema tempo discreto può ad esempio essere ottenuto mediante la tecnica di discretizzazione Eulero in avanti. Tuttavia, la specifica richiede che il sistema tempo continuo raggiunga esattamente la configurazione desiderata. Questo significa che dobbiamo utilizzare una tecnica di discretizzazione più precisa, ed in particolare, per ingressi costanti a tratti (detti Zero Order Hold o ZOH), è possibile avere una formula di discretizzazione che produce valori esatti ad ogni multiplo del tempo di campionamento ed in particolare anche all'istante finale. Utilizzando l'uguaglianza

$$\exp\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T\right\} = \begin{pmatrix} A_{ZOH} & B_{ZOH} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

è possibile calcolare le matrici del modello discretizzato (gli zeri nella matrice che appare nell'esponenziale sono di dimensioni tali da rendere la matrice stessa quadrata). Le matrici  $A_{ZOH}$  e  $B_{ZOH}$  possono dunque essere calcolate con il seguente codice **Matlab**:

```
T = 0.01;
tmp = expm(T*[A B; zeros(1,2) zeros(1,1)]);
Az = tmp(1:2,1:2);
Bz = tmp(1:2,3);
```

Per un sistema tempo discreto completamente raggiungibile<sup>1</sup> come quello in esame, ogni stato è raggiunto a partire da una qualsiasi configurazione iniziale in al più  $N = n$  passi, dove  $n$  è la dimensione dello spazio di stato del sistema. In generale, il raggiungimento di uno stato non implica il suo mantenimento per un tempo indefinito, come richiesto nel testo. Per soddisfare questa specifica si può procedere imponendo che il valore dello stato al passo  $N$  coincida con quello al passo  $N - 1$ . Il numero minimo di passi  $N$  necessario per soddisfare la specifica sul mantenimento dello stato desiderato è dunque pari a  $N = n + 1 = 3$ : i primi  $n$  consentono al sistema di portarsi nello stato desiderato, il successivo costituisce il valore del comando per cui lo stato raggiunto è un equilibrio.

A questo punto la sequenza ottima di comandi può essere calcolata usando il codice **Matlab**:

```
% calcolo della matrice di raggiungibilit\ 'a in 3 passi
R = [zeros(2,1);Bz]
for i=1:(N)
    R = [ Az^(i-1)*Bz;Az^i*Bz ],R];
end
u = -pinv(R)*[Az^N*x0; Az^(N+1)*x0];
```

che genera il segnale riportato in figura 2.

L'andamento delle variabili di stato del sistema LTC controllato (monotraccia) sono riportate in figura 3.

**A.1b)** Si procede come al punto precedente per calcolare la legge di controllo  $\delta_1$  e si verifica a posteriori se il vincolo è rispettato. Si sceglie di usare lo stesso tempo di campionamento del punto precedente, dato che abbiamo già verificato la completa raggiungibilità del sistema TD. Come si vede in figura 2 il vincolo non è rispettato se  $N = 3$ . La procedura usata fornisce il controllo minimo, dunque è necessario aumentare il numero di passi. È possibile vedere che  $N = 22$  è il numero di passi minimo per rispettare il vincolo imposto. La legge che si ottiene con la stessa procedura descritta sopra è riportata in figura 4. Il costo della soluzione così ottenuta risulta essere  $\approx 4.30 \cdot 10^{-3}$ .

**A.1c)** Per ottenere quanto richiesto è sufficiente diminuire il tempo di campionamento. Si può, ad esempio, ridurre il tempo di campionamento di un fattore 3 e aumentare, di converso, il numero di passi moltiplicandolo per lo stesso fattore (in modo da lasciare invariato  $T$ ). In figura 5 si riporta quanto ottenuto. Si nota che l'andamento qualitativo della legge di controllo appena progettata è del tutto analogo a quello della legge progettata precedentemente. Il costo della soluzione così ottenuta risulta essere  $\approx 4.29 \cdot 10^{-3}$ , che è inferiore, seppur di poco, rispetto a quello ottenuto al punto precedente.

<sup>1</sup>Si noti che il fatto che il sistema di partenza è completamente raggiungibile non implica che lo sia il suo discretizzato

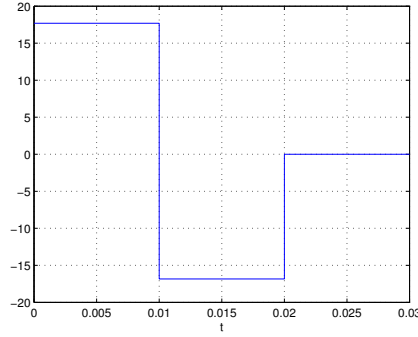
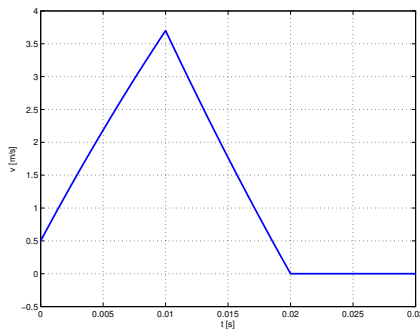
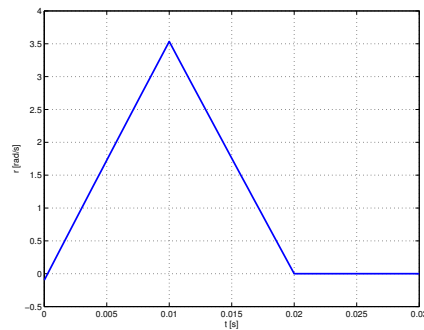


Figura 2: Sequenza di controllo  $\delta_1$  in tre passi prepianificata in avanti.



(a) Componente  $v$  della velocità lineare.



(b) Velocità angolare  $r$ .

Figura 3: Andamento dello stato del sistema con la legge  $\delta_1$ .

**A.2)** Ai fini del progetto del regolatore analizziamo numericamente le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema. A tal fine si calcolano numericamente le matrici di raggiungibilità e di osservabilità del sistema e se ne valutano i ranghi; per il sistema in esame le matrici risultano essere entrambe di rango pieno.

Si sceglie di allocare i poli del sistema in  $[-5, -6]$ . Una procedura per ottenere il compensatore basato su regolatore consiste nel calcolare preliminarmente la matrice  $K$  di retroazione degli stati in modo da allocare i poli della matrice  $A - BK$  nelle posizioni desiderate, dove  $A$  e  $B$  sono le matrici del sistema. Utilizzando la funzione di `Matlab`  $K = \text{place}(A, B, [-5, -6])$  si ottiene:

$$K = (-0.0537 \quad 0.3797).$$

Poiché non si ha accesso a tutte le variabili di stato ma il sistema risulta completamente osservabile si può realizzare un osservatore di Luenberger per ricostruire lo stato del sistema. La matrice  $L$  di iniezione delle uscite è calcolata in modo che la matrice dinamica dello stimatore  $A - LC$  ( $C = [0, 1]$  è la matrice di uscita del sistema) abbia autovalori in  $[-10, -12]$ . Anche qui si può usare il comando `place` di `Matlab` per calcolare la matrice  $L$ . Il risultato ottenuto impartendo il comando  $L = \text{place}(A', C', [-10, -12])$  è:

$$L = \begin{pmatrix} -181.0417 \\ 17.8125 \end{pmatrix}.$$

Il controllore progettato sarà dato, allora, dal sistema dinamico:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= (A - BK - LC)x_c - Lr \\ \delta_1 &= -Kx_c \end{aligned}.$$

**A.3)** Si usa lo schema riportato in figura (b) nel testo per la simulazione del comportamento del sistema controllato. L'andamento degli stati del sistema lineare controllato è riportato in figura 6.

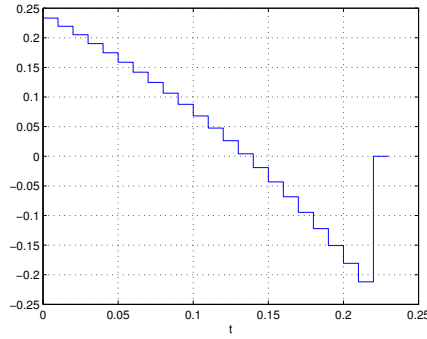


Figura 4: Sequenza di comando in anello aperto che rispetta il vincolo  $|\delta_1| \leq 0.25\text{rad}$

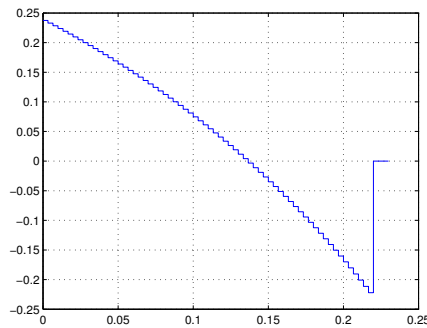


Figura 5: Sequenza di comando in anello aperto che rispetta il vincolo  $|\delta_1| \leq 0.25\text{rad}$  (costo ridotto in virtù di  $T_s = \frac{0.01}{3}\text{s}$ )

In figura 7 si riportano i grafici delle variabili di stato che mostrano il comportamento del sistema a partire dallo stato iniziale  $v(0) = 0.5$ ,  $r(0) = -0.1$ .

### Esercizio B

È immediato vedere che l'unico punto di equilibrio del sistema è in  $x_1 = x_2 = 0$ , infatti questa è l'unica soluzione del sistema di equazioni ottenuto ponendo  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ . Linearizzando il sistema attorno a questo equilibrio (considerando il vettore di stato  $x = [x_1, x_2]^T$ ) si ottiene:

$$\dot{x} = Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x, \quad (1)$$

che ha autovalori in  $-1, -2$ . L'equilibrio è dunque asintoticamente stabile per il linearizzato e, come si evince applicando il metodo indiretto di Lyapunov, localmente asintoticamente stabile per il non lineare. Una funzione di Lyapunov per il sistema può essere ottenuta risolvendo nella variabile matriciale  $P$  l'equazione

$$PA + A^T P = -Q, \quad (2)$$

dove  $Q$  è un'arbitraria matrice simmetrica, definita positiva. La soluzione di tale equazione può essere ottenuta per mezzo del comando **Matlab**:

$$P = \text{lyap}(A', \text{eye}(2))$$

Per ottenere una stima della RAS del sistema dato si deve valutare la regione in cui vale la disuguaglianza  $\dot{V}(x) < 0$  e trovare la più grande curva di livello di  $V(x)$  interamente contenuta in quella regione. La disuguaglianza può essere studiata numericamente generando numeri casualmente distribuiti sull'ellisse  $V(x) = R$  e guardando al segno di  $\dot{V}(x)$  al variare di  $R$ .

La procedura può essere svolta in maniera automatica con la seguente procedura **Matlab**:

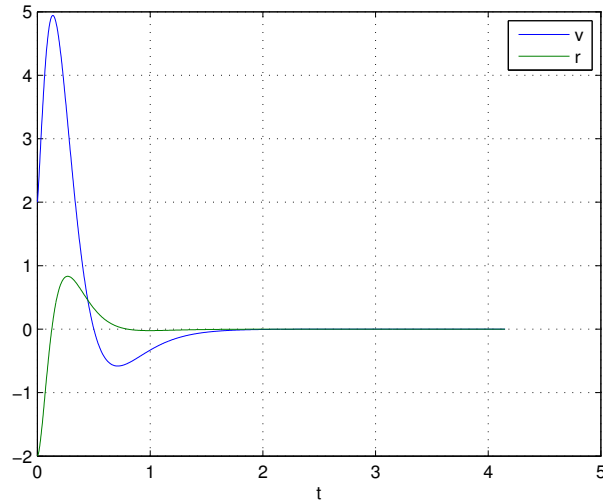


Figura 6: Comportamento del sistema lineare controllato

```

N_STEPS = 500000;
P = lyap(A', eye(2));

M = inv(sqrtm(P));

Rmin = 0;
Rmax = 2;

while (Rmax-Rmin > 0.0001)
    R = Rmin+(Rmax-Rmin)/2;
    for i=1:1:N_STEPS
        x = rand(2,1)-0.5;
        y = sqrt(R)*x/norm(x);
        z = M*y;
        vdot = 2*z'*P*[z(2); -z(1)-z(2)-(1-z(2)^2)*(z(1)+2*x(2))];
        if vdot > 0 disp('punto esterno alla stima'),R, break; end
    end
    if vdot < 0
        Rmin = R;
    else
        Rmax = R;
    end
end

disp('risultato ')
Rmin

```

La procedura descritta è estremamente lenta. È possibile, però, procedere per approssimazioni successive usando prima valori bassi per la variabile N\_STEPS (generando cioè un piccolo numero di punti su ogni curva di livello) e poi restringendo il range di valori esplorati  $[R_{min}, R_{max}]$  generando un numero di punti più consistente.

Nelle esecuzioni della procedura effettuate per la scrittura di questo compito è stato individuato il valore  $R_{min} \approx 8.59 \cdot 10^{-4}$ . Questo ci porta a dire:

$$\text{RAS} \supseteq \{x | V(x) = x^T P x \leq 8.59 \cdot 10^{-4}\}.$$

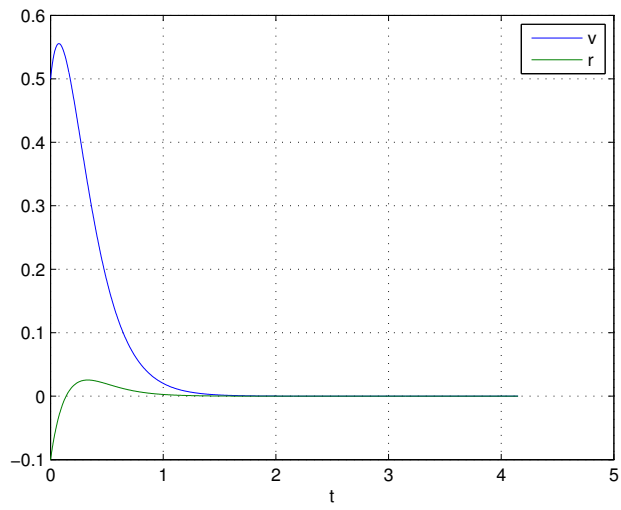


Figura 7: Comportamento del sistema non lineare controllato