Teoria dei Sistemi — 03-07-2015

A Dato il sistema dinamico rappresentato dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-10s + 1}{(s+1)(s^2 + 16s + 100)}$$

A.1 Si disegnino i diagrammi di Bode, Nyquist e i luoghi delle radici.

A.2 Si determinino tutti i valori di K affinché il sistema retroazionato con un controllore statico $C(s) = K$ sia asintoticamente stabile. Commentare i risultati facendo riferimento ai diagrammi disegnati.

B Si consideri il sistema dinamico lineare rappresentato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(-10s + 100)}{(s^2 + 1.2s + 1)}. \tag{1}$$

B.1 Si progetti un controllore che renda il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile con un errore al gradino a regime minore del 25% e tale per cui il rumore di misura venga attenuato di almeno lo 0.1% per disturbi sinusoidali a pulsazioni maggiori di 100rad/sec.

C Si consideri il sistema dinamico rappresentato dalla seguente equazione differenziale in forma normale:

$$y^{(3)}(t) = -2\ddot{y}(t)\cos y(t) - \dot{y}(t)(\dot{y}(t) + 2) - y(t) + u(t)$$

C.1 Si studino gli equilibri per ingressi costanti pari a $\frac{\pi}{4}$.

C.2 Si scriva il sistema traslato in forma normale con equilibrio nell'origine.

C.3 Si determini la forma di stato del sistema traslato linearizzato nell'origine.

C.4 Si determini la funzione di trasferimento del sistema linearizzato.

D Sia

$$y(t) = (-5e^{-t} + e^{-9t} + 4 + 4t)H(t)$$

la risposta alla rampa di un sistema dinamico lineare tempo continuo. Si determini la risposta all'impulso dello stesso sistema e si commentino i risultati ottenuti.

Soluzione

A Il sistema dinamico presenta uno zero in $z_1 = 0.1$, un polo in $p_1 = -1$ e una coppia di poli complessi stabili in $p_{2,3} = -8 \pm 6j$ (pulsazione naturale $\omega_n = 10$ e smorzamento $\delta = 0.8$). Il guadagno statico del sistema é pari a 10^{-2}. Per quanto riguarda i diagrammi di Bode asintotici, il guadagno statico fornisce un contributo in ampiezza costante pari a -40db e non fornisce contributo in fase. Lo zero in $z_1 = 0.1$ fornisce un contributo di $+20$db/dec in ampiezza e di $-\pi/2$ in fase essendo a parte reale positiva. Il polo in $p_1 = -1$ fornisce un contributo di -20db/dec in ampiezza e di $-\pi/2$ in fase essendo a parte reale negativa. La coppia di poli complessi stabili a pulsazione naturale $\omega_n = 10$ fornisce un contributo di -40db/dec in ampiezza e di $-\pi$ in fase essendo a parte reale negativa.

I diagrammi di Bode del sistema sono riportati in figura 1.

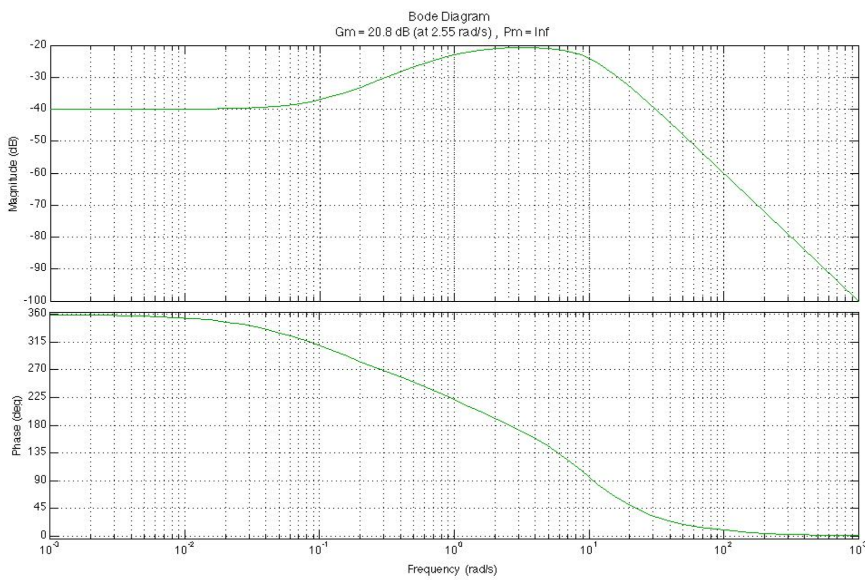

Figura 1: Diagrammi di Bode del sistema.

Dai diagrammi di Bode si ottiene il diagramma di Nyquist riportato in figura 2. Si noti che il diagramma non circonda il punto -1 e pertanto il sistema retroazionato con $C(s) = 1$ é asintoticamente stabile. Considerando valori di $K > 1$ si arriverà ad avere un diagramma che compirá due giri in senso orario intorno al punto -1 e quindi il sistema puó diventare instabile per elevati valori di K.

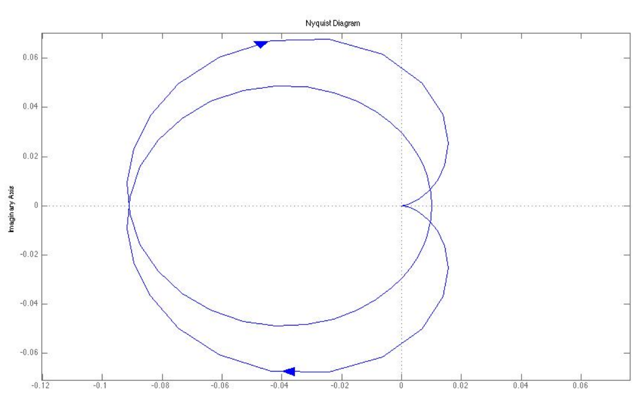

Figura 2: Diagramma di Nyquist del sistema.

I luoghi delle radici diretto e inverso sono infine riportati in figura 3. Si noti che nel luogo con $K > 0$ si hanno tre punti di biforcazione del luogo e nessuno nel luogo con $K < 0$. Se si considera la derivata della $G(s)$ rispetto ad s e se ne calcolano i valori che l'annullano si ottiene l'equazione $20s^3+167s^2+1010s-116 = 0$ che ammette quindi tre soluzioni. Nel luogo con $K < 0$ per costruzione é chiaro che non sono presenti punti di biforcazione e quindi sono tutti nel luogo con $K > 0$.

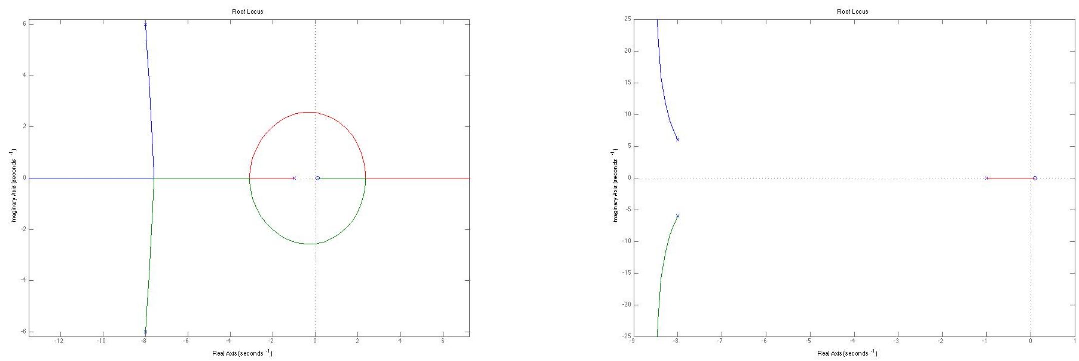

Figura 3: Luogo delle radici per $K > 0$ e $K < 0$.

A.2 Per determinare tutti i valori di K affinché il sistema retroazionato con un controllore statico $C(s) = K$ sia asintoticamente stabile si utilizza il criterio di Routh. I poli dell'anello chiuso coincidono con le radici del polinomio $d(s) + Kn(s) = s^3 + 17s^2 + (116 - 10K)s + 100 + K$. La tabella di Routh risulta

$$\begin{array}{cc} 1 & 116 - 10K \\ 17 & 100 + K \\ a & 0 \\ 100 + K & 0 \end{array}$$

con $a = -\frac{1}{17}(171K - 1872)$. Affinché il sistema sia asintoticamente stabile la prima colonna della tabella non deve avere cambi di segno. Si deve quindi avere $171K - 1872 < 0$ e $100 + K > 0$ da cui: $-100 < K < 10.94$. Come già osservato dal diagramma di Nyquist un $K > 1$ troppo elevato (in particolare $K > 10.94$) porta all'instabilità del sistema. Anche un valore troppo piccolo (negativo) di K porta all'instabilità come si può vedere dal luogo in figura 3 per $K < 0$.

B I diagrammi di Bode del sistema

$$G(s) = \frac{(-10s + 100)}{(s^2 + 1.2s + 1)}. \tag{2}$$

sono riportati in figura 4. Si noti che i margini di fase e di guadagno (circa -20db) sono negativi e che il sistema in anello chiuso è instabile. Scegliendo un controllore della forma $C(s) = K$ con $K < 1$ si abbassa il guadagno dell'anello e si può ottenere la stabilità. Ad esempio con $K < 0.1$ si ottiene un margine di ampiezza positivo. La specifica sull'errore al gradino però richiede che la costante di guadagno statico dell'anello aperto sia maggiore di 10db e pertanto $20Log(K100) > 10$db da cui segue $K > 0.03$.

Per la specifica sul disturbo di misura si richiede che per pulsazioni maggiori di 10^2rad/sec il diagramma delle ampiezze della funzione di anello $C(s)G(s)$ sia minore di -60db. Con $C(s) = 0.04$ i diagrammi di Bode della funzione di anello sono riportati in figura 5 e si nota che la specifica non è verificata.

Affinché la specifica sia verificata è necessario mettere (almeno) un polo in alta frequenza. Ad esempio mettendo un polo in -15 si ottengono i diagrammi di Bode riportati in figura 6 dove si evince che tutte le specifiche sono verificate.

C.1 Per studiare gli equlibri del sistema si pongono $y^{(3)} = \ddot{y} = \dot{y} = 0$ e, per $u(t) = \frac{\pi}{4}$ si ottiene $\bar{y} = \frac{\pi}{4}$.

C.2 Sia ora $z(t) = y(t) - \frac{\pi}{4}$ e $v(t) = u(t) - \frac{\pi}{4}$, il sistema traslato in forma normale con equilibrio nell'origine risulta

$$z^{(3)}(t) = -2\ddot{z}(t)\cos\left(z(t) + \frac{\pi}{4}\right) - \dot{y}(t)(\dot{y}(t) + 2) - z(t) + v(t)$$

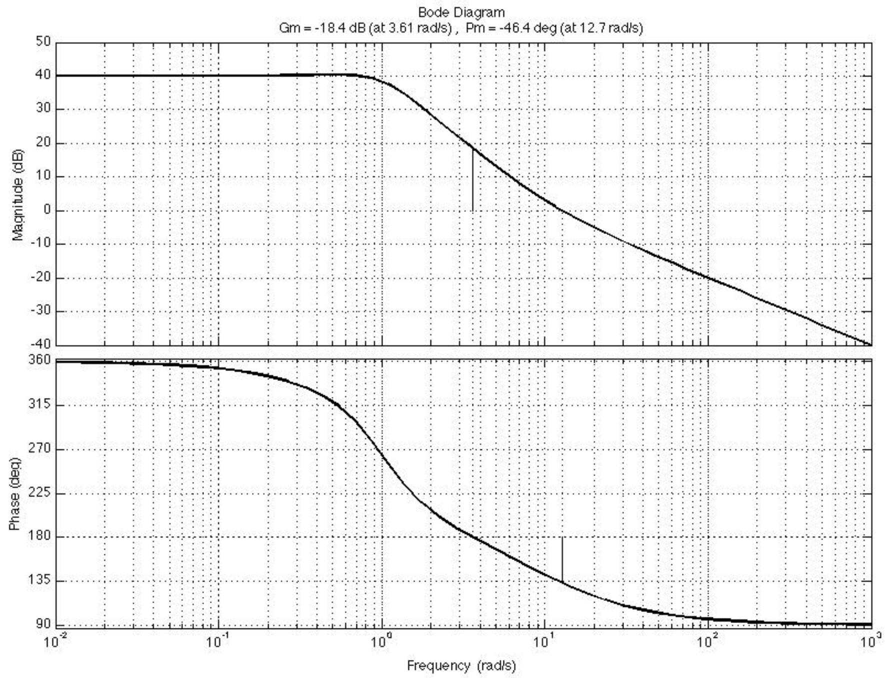

Figura 4: Diagrammi di Bode del sistema.

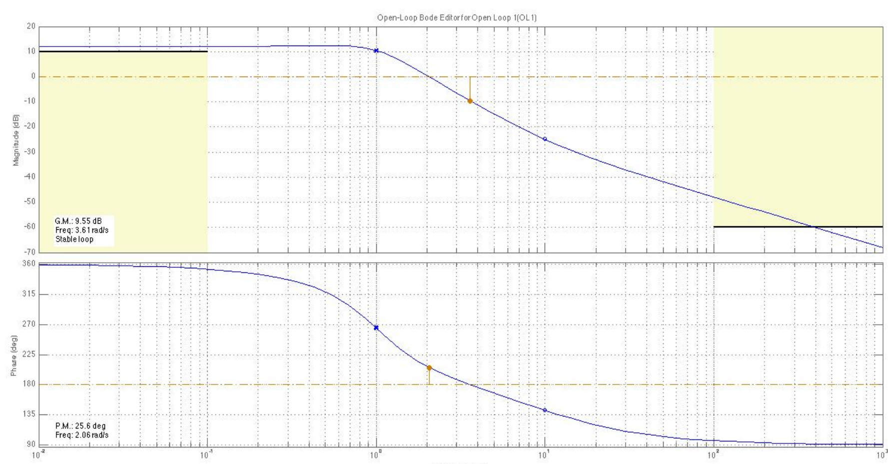

Figura 5: Diagrammi di Bode del sistema $C(s)G(s)$ con $C(s) = 0.04$.

C.3 Scegliendo le variabili di stato $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$, $x_3 = \ddot{z}$ si ottiene il sistema del primo ordine non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_3 \cos\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - x_2(x_2 + 2) - x_1 + v(t) \end{cases}$$

Il sistema linearizzato è infine caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1\ 0\ 0]$$

C.4 Il sistema ottenuto è in forma canonica di controllo pertanto il calcolo della funzione di trasferimento si fa considerando l'ultima riga della matrice A e la matrica C:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + \sqrt{2}s^2 + 2s + 1}$$

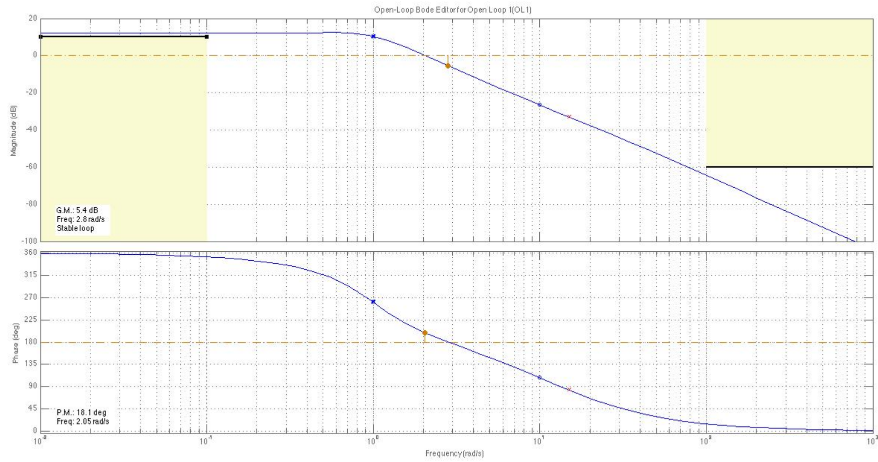

Figura 6: Diagrammi di Bode del sistema $C(s)G(s)$ con $C(s) = \frac{0.04}{1+0.067s}$.

D Applicando la trasformata di Laplace alla risposta alla rampa:

$$y(t) = (-5e^{-t} + e^{-9t} + 4 + 4t)H(t)$$

si ottiene

$$Y(s) = -\frac{5}{s+1} + \frac{1}{s+9} + \frac{4}{s} + \frac{4}{s^2} = \frac{76s+36}{s^2(s+1)(s+9)}$$

da cui segue che la funzione di trasferimento del sistema è

$$G(s) = \frac{76s+36}{(s+1)(s+9)} = -\frac{5}{s+1} + \frac{81}{s+9}$$

da cui antitrasformando si ottiene la risposta all'impulso:

$$y_\delta(t) = -5e^{-t} + 81e^{-9t}.$$

Come ci si aspettava nella risposta alla rampa erano presenti termini dovuti alla rampa stessa ma i termini esponenziali potevano solo essere modi interni del sistema che pertanto si ritrovano anche nella risposta all'impulso. Inoltre i termini dovuti alla rampa non si ritrovano nella risposta all'impulso.