- Trasformazioni

$$
\begin{aligned}
B_A &= (J_A B^{-1} J_A^T)^{-1} \\
C_A \dot{x} &= B_A J_A B^{-1} C \dot{q} - B_A \dot{J}_A \dot{q} \\
g_A &= B_A J_A B^{-1} g
\end{aligned}
$$

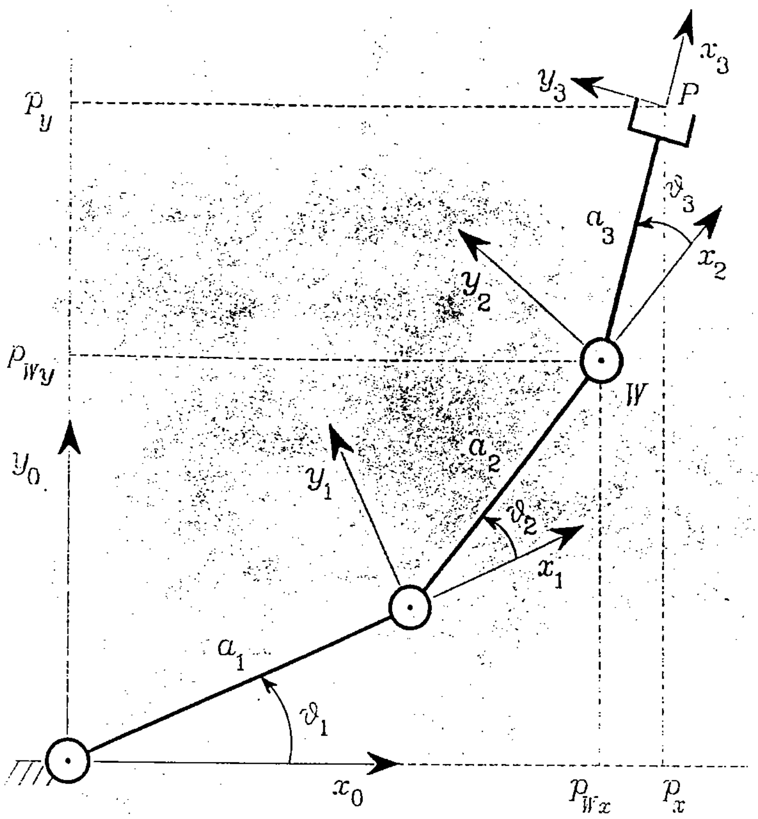
  ⋆ manipolatore non ridondante

$$
\begin{aligned}
B_A &= J_A^{-T} B J_A^{-1} \\
C_A \dot{x} &= J_A^{-T} C \dot{q} - B_A \dot{J}_A \dot{q} \\
g_A &= J_A^{-T} g
\end{aligned}
$$

- Equazioni del moto

$$
B_A(x)\ddot{x} + C_A(x, \dot{x})\dot{x} + g_A(x) = \gamma_A - h_A
$$

Manipolatore planare a tre bracci



$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1) & \boldsymbol{z}_2 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_2) \\ \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 & \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

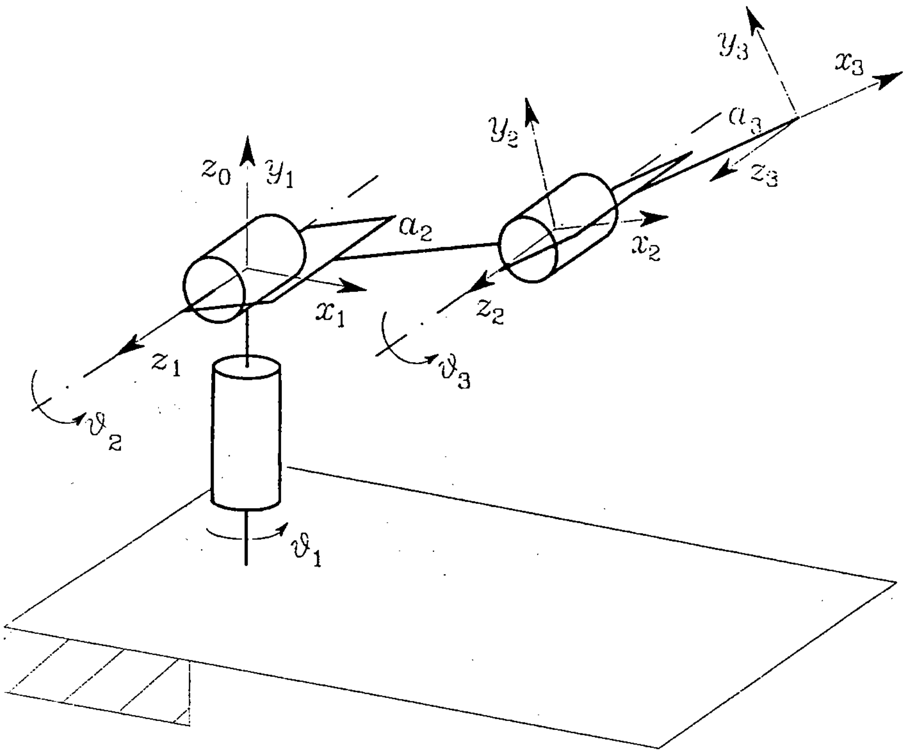
$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{J}_P = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \end{bmatrix}
$$

Manipolatore antropomorfo



$$J = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} c_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{J}_P = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}
$$

Analisi della cinematica differenziale

Relazioni cinetostatiche lineari:

$$\dot{\underline{x}} = J_{(q)}\,\dot{\underline{q}}$$

$$\underline{\tau} = J^T_{(q)}\,\underline{w}$$

dove $\dot{q}$ ha n componenti (vel. angolari o lineari)
$\dot{x}$ ha m componenti (" " " ")
τ ha n componenti (forze e momenti)
w ha m componenti (" " ")

- Le dimensioni fisiche di questi vettori sono in generale disomogenee

- Il vettore $\dot{\underline{x}}$ delle velocità dell'end-effector (o della terna di riferimento di interesse in generale) può essere scelto in modi diversi a seconda dei compiti su cui si pone attenzione. Ad es.

  - Se interessano posizione e orientazione dell'e.e. di un manipolatore in 3-D, $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{pmatrix}$ con $\dot{p}$: vel. dell'origine e ω: vel. angolare di una terna fissa sull'end-effector. $\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{pmatrix}$ si dice "TWIST"
  - Analogamente in 2D, $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ ha dim 3
  - Se nel compito l'orientazione non è importante si può tralasciare: $\dot{x} = (\dot{p})$

- Considerazioni analoghe si applicano alle forze/coppie applicate sull'end-effector, $\underline{w}$. Naturalmente, laddove per una certa componente di $\underline{\dot{x}}$ si scelga una vel. lineare, la corrispondente componente di $\underline{w}$ dovrà essere una forza; se in $\underline{\dot{x}}$ ho una componente di vel. angolare, in $\underline{w}$ dovrò avere un momento

- Manip. 3D, $\underline{w} = \begin{pmatrix} \underline{f} \\ \underline{\mu} \end{pmatrix}$, $\underline{f}$: forze applicate all'e-e
  $\underline{\mu}$: momenti applicati all'e-e
  $\begin{pmatrix} \underline{f} \\ \underline{\mu} \end{pmatrix}$ si dice "WRENCH"

- Le stesse relazioni valgono tra le componenti di pari denominazione in $\underline{q}$ e $\underline{\tau}$: a giunti rotoidali corrispondono vel. angolari e coppie, a giunti prismatici vel. lineari e forze.

La definizione congruente delle componenti di $\underline{\dot{x}}$, $\underline{w}$, $\underline{\dot{q}}$, $\underline{\tau}$ fa sì che siano ben definiti i prodotti

$$\left.\begin{aligned} \langle \underline{w}, \underline{\dot{x}} \rangle &= \underline{w}^T \underline{\dot{x}} \\ \langle \underline{\tau}, \underline{\dot{q}} \rangle &= \underline{\tau}^T \underline{\dot{q}} \end{aligned}\right\}$$ che hanno le dimensioni fisiche di potenze meccaniche ($\frac{Nm}{s}$

Nota Bene: NON sono in generale ben definiti i prodotti interni tra le grandezze omologhe:

$\langle \underline{\dot{x}}, \underline{\dot{x}} \rangle = \underline{\dot{x}}^T \underline{\dot{x}} = ?$ dimensioni fisiche disomogenee nella somma di quadrati!

$\langle \underline{\dot{q}}, \underline{\dot{q}} \rangle$? Quindi il "prodotto scalare" è ben definito

$\langle \underline{w}, \underline{w} \rangle$? solo tra vettori di grandezze diverse ...

$\langle \underline{\tau}, \underline{\tau} \rangle$? oltre alla ...

Ridondanza e Difettività

- Consideriamo un manipolatore con $J(q)$ $m \times n$

$$\text{dim. T.S.}\ m \left\{ \overbrace{J(q)}^{n \text{ giunti}} \right.$$

n = n° giunti

m = dimensione del Task space

- Se $n > m$ il manipolatore si dice ridondante
  $n < m$ " " " " difettivo
  $n = m$ " " " " minimale (quadrato)

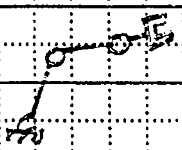
- I valori di q per i quali $\text{rank}\, J(q) < \min\{m, n\}$ si dicono <u>singolarità</u> del manipolatore

Una singolarità è semplice se $\text{rank}\, J(q_s) = \min\{m, n\} - 1$
doppia se $\text{rank}\, J(q_s) = \min\{m, n\} - 2$
etc.

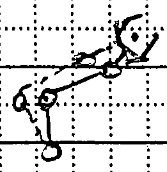
Se fosse $\text{rank}\, J(q) < \min\{m, n\}$, $\forall q$, si avrebbe una singolarità "banale",

Esempi:

Manipolatore Planare RRR
Task posizione + orientaz. EE } $n = 3$, $m = 3$ Q

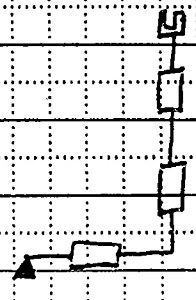


Manipolatore Planare RRR
Task posizione } $n = 3$, $m = 2$ R.



Manipolatore Planare RR
Task posiz. + orientaz. } $n = 2$, $m = 3$ D

Manipolatore Planare PPP
Task posiz. + orientaz. } $n = 3$, $m = 3$ S.B.



Guardiamo le relazioni lineari della cineto-statica

$$\begin{cases} \dot{x} = J(q)\,\dot{q} \\ \tau = J^T(q)\,w \end{cases}$$

I sottospazi fondamentali della matrice $J(q)$ hanno in Robotica una interpretazione fisica immediata:

- $\mathcal{R}(J(q))$: sottospazio che contiene tutte e sole le possibili velocità dell'end-effector (al variare ~~delle velocità dei giunti~~).
- $\mathcal{N}(J(q))$: sottospazio delle velocità dei giunti che lasciano nulla la velocità dell'end-effector (ridondanti)
- $\mathcal{R}(J^T(q))$: sottospazio delle possibili coppie ai giunti al variare del carico esterno
- $\mathcal{N}(J^T(q))$: sottospazio delle forze/coppie esterne che sono bilanciate da coppie ai giunti nulle – cioè che si scaricano interamente sulla struttura meccanica

Il teorema fondamentale dell'algebra lineare dice che

$$\dim \mathcal{R}(J) + \dim \mathcal{N}(J^T) = m$$
$$\dim \mathcal{N}(J) + \dim \mathcal{R}(J^T) = n$$

e si può leggere in Robotica così:

- la differenza tra le dimensioni del task-space (m) e del sottospazio delle velocità possibili in una configurazione, è pari alla dimensione del sottospazio delle forze esterne strutturalmente assorbite.
- la differenza tra il numero dei giunti (n) e la dim. delle coppie ai giunti "sensibili" è pari alla dim. del sottosp. di velocità ridon

Il teorema fondamentale ha una espressione più forte nei casi in cui sugli spazi di dominio e codominio dell'applicazione lineare siano definiti un prodotto interno e, quindi, un concetto di ortogonalità:

$$\begin{cases} R(J)^{\perp} = \mathcal{N}(J^T) \\ R(J^T)^{\perp} = \mathcal{N}(J) \end{cases}$$

che significa: se $\mathcal{N}(J^T)$ è composto di tutti e soli i vettori (m-dimensionali) che sono perpendicolari ai vettori in $R(J)$ (anch'essi ovviamente m-dimensionali) etc.

Anche se si è visto che sugli spazi $\dot{x}, t, w, \dot{q}$ non sono definiti prodotti scalari e ortogonalità, abbiamo visto che sono ben definiti i prodotti $\langle t, \dot{q} \rangle$ e $\langle w, \dot{x} \rangle$.

Diremo che un wrench $\underline{w}$ ed un twist $\underline{t}$ sono complementari se $\langle w, \dot{x} \rangle = w^T \dot{x} = 0$ - Scriviamo ancora $w \perp \dot{x}$

Analogamente per τ e $\dot{q}$.

Ciò detto, la relazione tra complementi ortogonali sopra riportata può essere letta in Robotica come segue:

- I wrench strutturali sono complementari alle velocità dell'end effector
- Le velocità ridondanti sono complementari alle coppie ai giunti eccitabili da forze sull'end-effector.

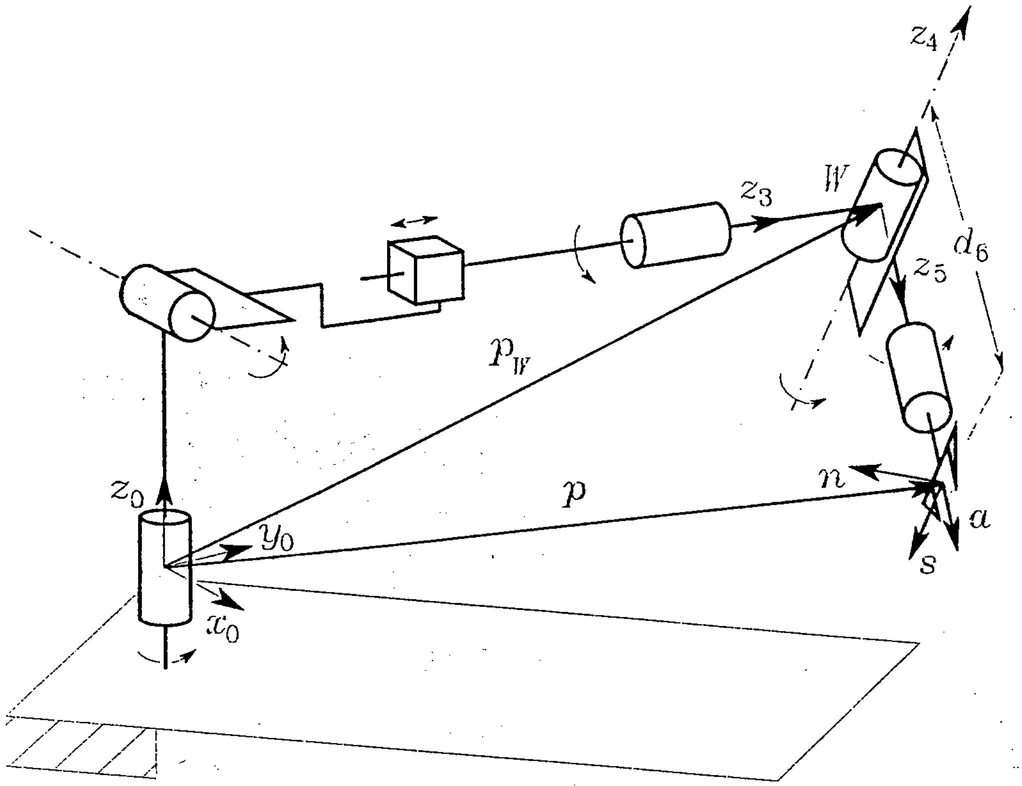
SINGOLARITÀ CINEMATICHE

$$v = J(q)\dot{q}$$

- se J diminuisce di rango $\Longrightarrow$ *singolarità cinematiche*
  (a) perdita di mobilità
  (b) infinite soluzioni al problema cinematico inverso
  (c) velocità elevate nello spazio dei giunti (nell'intorno di una singolarità)

- Classificazione
  - ⋆ Singolarità *ai confini dello spazio di lavoro raggiungibile*
  - ⋆ Singolarità *all'interno dello spazio di lavoro raggiungibile*

Disaccoppiamento di singolarità



- calcolo delle *singolarità della struttura portante*

- calcolo delle *singolarità del polso*

n>6

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{J}_{12} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_3 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_3) & \boldsymbol{z}_4 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_4) & \boldsymbol{z}_5 \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_5) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{22} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_3 & \boldsymbol{z}_4 & \boldsymbol{z}_5 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_W \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{p}_W - \boldsymbol{p}_i$ paralleli a $\boldsymbol{z}_i$, $i = 3, 4, 5$

$$\boldsymbol{J}_{12} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

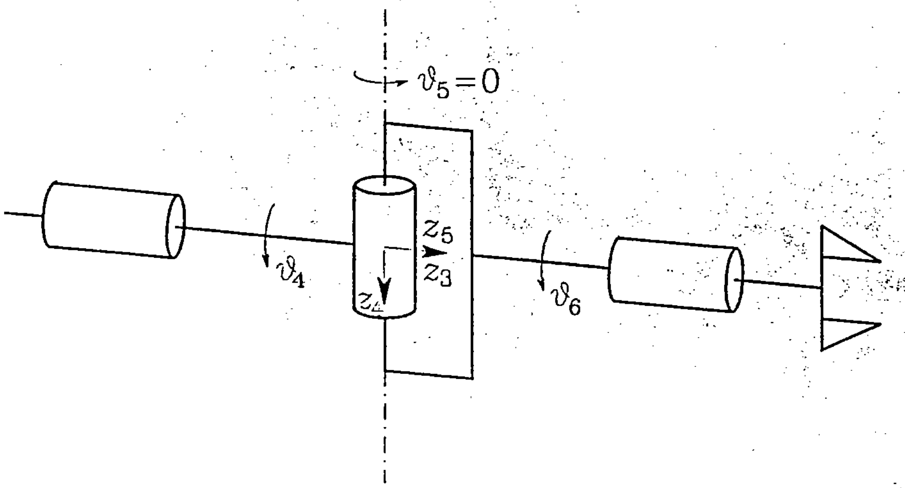
$$\det(\boldsymbol{J}) = \det(\boldsymbol{J}_{11})\det(\boldsymbol{J}_{22})$$

$$\det(\boldsymbol{J}_{11}) = 0 \qquad \det(\boldsymbol{J}_{22}) = 0$$

Singolarità di polso

- z_3 parallelo a z_5

$$\vartheta_5 = 0 \qquad \vartheta_5 = \pi$$



⋆ rotazioni uguali e opposte di ϑ_4 e ϑ_6 non producono alcuna rotazione dell'organo terminale

Singolarità di struttura portante

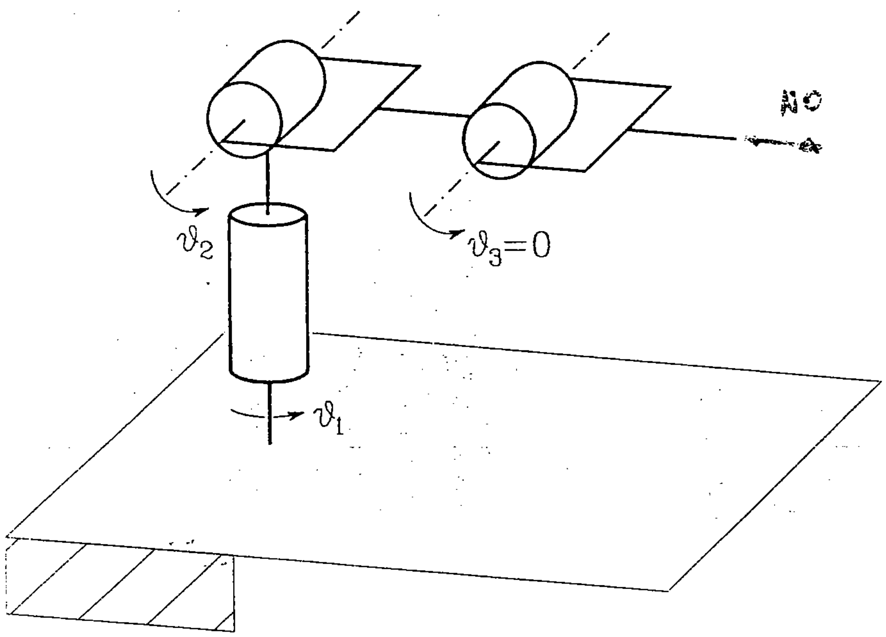
- Manipolatore antropomorfo

$$\det(\boldsymbol{J}_P) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23})$$

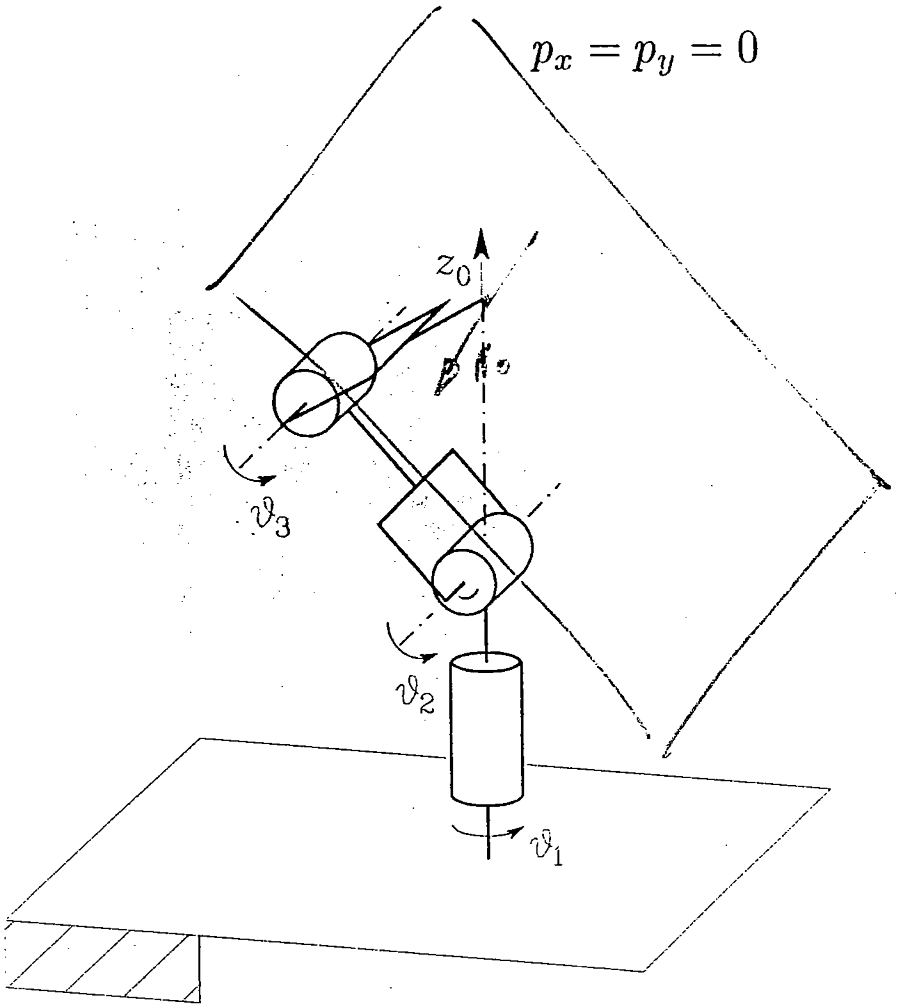
$$s_3 = 0 \qquad\qquad a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$$

⋆ Singolarità di *gomito*

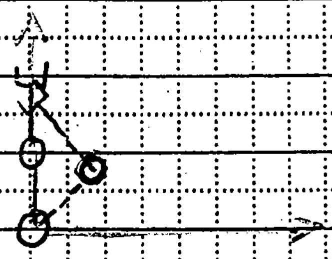
$$\vartheta_3 = 0 \qquad\qquad \vartheta_3 = \pi$$



⋆ Singolarità di *spalla*



Le singolarità cinematiche possono impedire al manipolatore di eseguire moti con velocità specificata (se $\dot{x} \notin \mathcal{R}(J)$). Ciononostante, il moto su alcune di quelle direzioni può essere possibile:



Esempio: Manipolatore planare 2 Link

Cinematica diretta: $\begin{cases} x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ y = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{cases}$

Cinem. diff. $\begin{cases} \dot{x} = -(a_1 s_1 + a_2 s_{12})\dot{q}_1 - a_2 s_{12}\dot{q}_2 \\ \dot{y} = +(a_1 c_1 + a_2 c_{12})\dot{q}_1 + a_2 c_{12}\dot{q}_2 \end{cases}$

ovvero $\begin{cases} \dot{x} = -y\,\dot{q}_1 - a_2 s_{12}\dot{q}_2 \\ \dot{y} = x\,\dot{q}_1 + a_2 c_{12}\dot{q}_2 \end{cases}$

Sia per $t=0$, $q_1(0) = \pi/2$; $q_2(0) = 0$ (SINGOLARITÀ).

Si ha $\mathcal{R}(J) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ perp. all'asse $x = 0$.

Ciononostante l'end-effector può muoversi senza mai abbandonare $x = 0$:

$x(t) = 0 \Rightarrow \dot{y}(t) = a_2 c_{12}\dot{q}_2$

e

$\Rightarrow 0 = -y\dot{q}_1 - a_2 s_{12}\dot{q}_2 \Rightarrow \dot{q}_1 = -\dfrac{a_2 s_{12}}{y}\dot{q}_2$ $(y \neq$

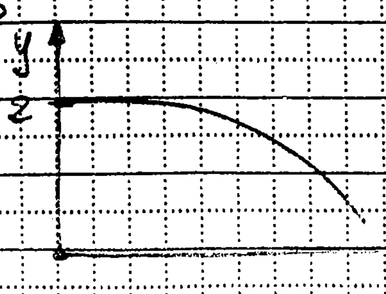
Se scegliamo $q_2(t) = \alpha t^2$

si ha $\dot{q}_2(t) = 2\alpha t$; $\dot{q}_1(t) = -\dfrac{a_2 \sin(q_1+q_2)}{a_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1+q_2)}\,2\alpha t$

$q_1(t)$ soluzione della ODE con $q_1(0) = \pi/2$;
(soluz. numerica)

$\Rightarrow x(t) = 0$

$\Rightarrow y(t)$



da rivedere

$\ddot{y} = 0$

Considerando quindi

$\begin{cases} x = f(q) \\ \dot{x} = J(q)\dot{q} \\ \ddot{x} = J\ddot{q} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial J(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k \end{cases}$

si esce da singolarità del primo ordine con accelerazioni non nulle purché $\mathcal{R}(J_{?}) \cup \mathcal{R}(J_0)$ ...

Manipolabilità

Un braccio in configurazione singolare, o presso di singolare, si comporta in modo assai diverso a seconda delle direzioni in cui il moto dell'end-effector è specificato:

$$\dot{x} = J\dot{q} = U \Sigma V^T \dot{q} \qquad \dot{\bar{x}} \triangleq U^T \dot{x};$$

$$\dot{\bar{x}} = \Sigma \dot{\bar{q}} \qquad \dot{\bar{q}} \triangleq V^T \dot{q};$$

se $m = n$, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$

Vicino alle singolarità, $\sigma_1 \cong 0$; in queste coordinate, per effettuare una velocità $\dot{\bar{x}} = (1, 0, \dots, 0)^T$ è necessaria una velocità dei giunti $\dot{\bar{q}} = (1/\sigma_1, 0, \dots, 0)^T$ molto elevata. Nelle vecchie coordinate, $\dot{x} = U_1$, prima colonna di U, cioè autovettore di JJ^T corrisp. a $\sigma_{min}(JJ^T)$; $\dot{q} = \frac{1}{\sigma_1} V_1$, V_1 prima colonna di V, cioè autovettore di J^TJ corrisp. a $\sigma_{min}(J^TJ)$

Bracci ridondanti: $\dot{\bar{x}} = \Sigma_1 \dot{\bar{q}}_1$

$$\Sigma_1 = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{0 \ \cdots \ 0}}^{n-m} \\ \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bracci difettivi: $\dot{\bar{x}} = \Sigma_1 \dot{\bar{q}}_1$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-n \end{matrix}$$

Al contrario, un moto che realizzi $\dot{\bar{x}} = (0, \dots, 0, 1)$ (per bracci quadrati) è $\dot{\bar{q}} = (0, 0, \dots, 1/\sigma_m)$, molto più lento.

Si generalizza questa osservazione e caratterizza le configurazioni sulla base di un rapporto "costo" (velocità giunti) / "prestazioni" (vel. end-effector)

Definiamo il rapporto $R_v = \dfrac{\|\dot{x}\|}{\|\dot{q}\|}$

dove le norme sono da intendersi, per motivi di consistenza fisica, come opportunamente pesate da matrici dimensionate

$$\|\dot{x}\|^2 = \dot{x}^T W_x \dot{x}$$

$$\|\dot{q}\|^2 = \dot{q}^T W_q \dot{q}$$

Sostituendo $\dot{x} = J\dot{q}$, si ha

$$R_v^2 = \frac{\dot{q}^T J^T W_x J \dot{q}}{\dot{q}^T W_q \dot{q}}$$

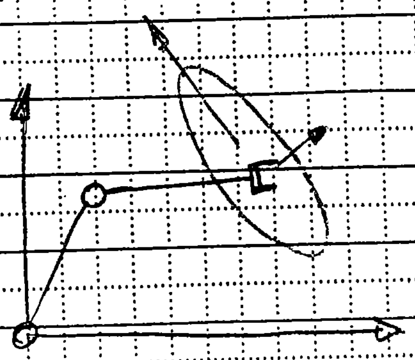
Questo è il noto "Rapporto di Rayleigh": il suo massimo (risp. minimo) è ottenuto per quelle $\dot{q}$ che risolvono il problema di autovettori generalizzati

$$(J^T W_x J)\,\dot{q} = \lambda W_q \dot{q}$$

equivalente, per W_q invertibile e p.d., al classico pb.

$$(W_q^{-1/2} J^T W_x J W_q^{-1/2})\,y = \lambda y$$

A questa forma quadratica è associato un ellissoide i cui assi principali sono diretti come gli autovettori e hanno lunghezza proporzionale alla radice degli autovalori.



Trovate le $\dot{q}$ ottime (pessime) le corrispondenti $\dot{x}$ sono semplicemente $J\dot{q}_i$

ELLISSOIDI DI MANIPOLABILITÀ

- *Ellissoide di manipolabilità in velocità*
  - ⋆ insieme delle velocità ai giunti a norma costante

$$\dot{q}^T\dot{q} = 1$$

  - ⋆ manipolatore ridondante

$$\dot{q} = \boldsymbol{J}^{\dagger}(q)v$$

$$\Downarrow$$

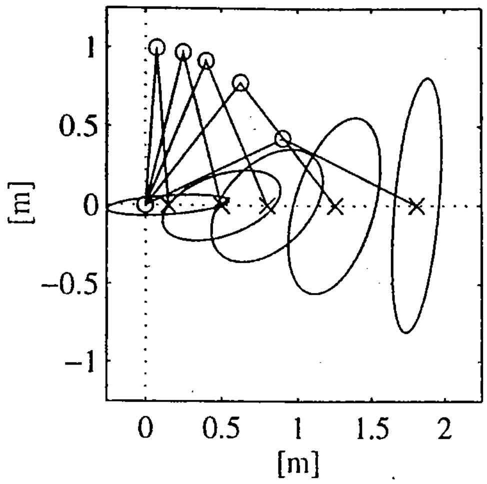
$$\boldsymbol{v}^T\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\right)^{-1}\boldsymbol{v} = 1$$

- Assi
  - ⋆ autovettori $\boldsymbol{u}_i$ di $\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T \quad \Longrightarrow \quad$ direzioni
  - ⋆ valori singolari $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T)} \quad \Longrightarrow \quad$ dimensioni
- Volume
  - ⋆ proporzionale a

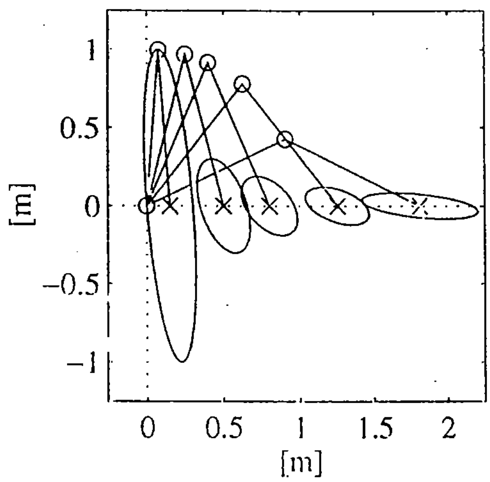
$$w(\boldsymbol{q}) = \sqrt{\det\left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\right)}$$

Manipolatore planare a due bracci

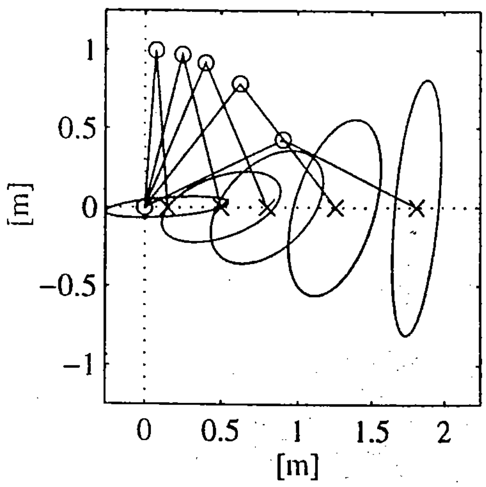
- Ellissi di manipolabilità in velocità



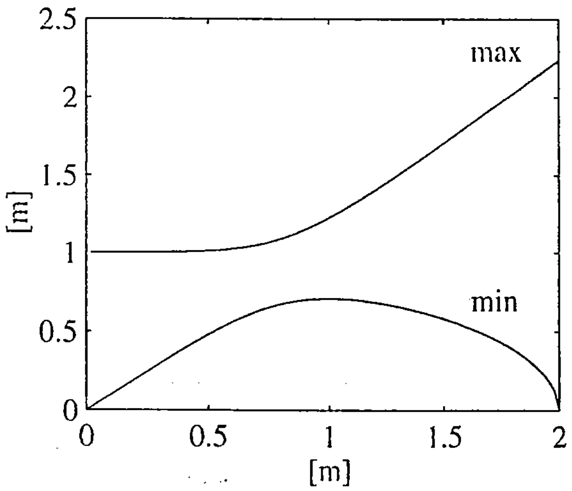
- Ellissi di manipolabilità in forza



- Ellissi di manipolabilità in velocità



- Valori singolari



- *Ellissoide di manipolabilità in forza*
  - ⋆ insieme delle coppie ai giunti a norma costante

$$\tau^T \tau = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma^T \big(J(q) J^T(q)\big) \gamma = 1$$

- Dualità cineto-statica
  - ⋆ una direzione lungo la quale si ha elevata manipolabilità in velocità è una direzione lungo la quale si ha scarsa manipolabilità in forza, e viceversa

- Manipolatore $\equiv$ *trasformatore meccanico* di velocità e forze dallo spazio dei giunti allo spazio operativo

  ⋆ rapporto di trasformazione lungo una direzione per l'ellissoide in forza

$$\alpha(\boldsymbol{q}) = \left(\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{u}\right)^{-1/2}$$

  ⋆ rapporto di trasformazione lungo una direzione per l'ellissoide in velocità

$$\beta(\boldsymbol{q}) = \left(\boldsymbol{u}^T \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\right)^{-1} \boldsymbol{u}\right)^{-1/2}$$

  ⋆ utilizzazione di gradi di mobilità ridondanti

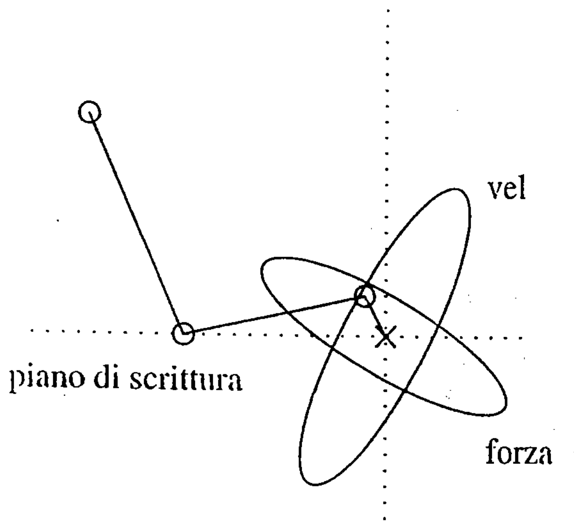
Manipolatore planare a due bracci

- Misura di manipolabilità

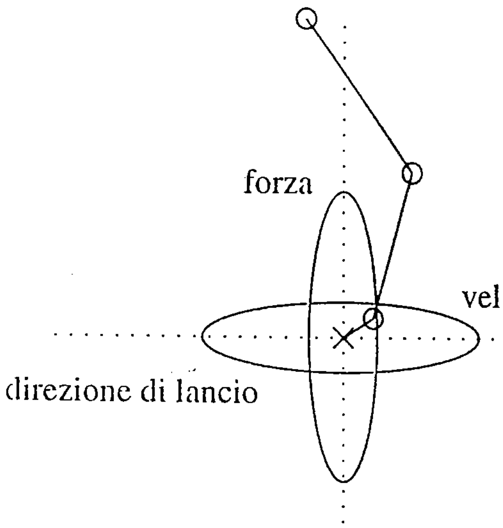
$$w = |\det(\boldsymbol{J})| = a_1 a_2 |s_2|$$

  - $\star$ max per $\vartheta_2 = \pm\pi/2$
  - $\star$ max per $a_1 = a_2$ (a parità di estensione $a_1 + a_2$)

- Compatibilità della struttura ad eseguire un compito assegnato lungo una direzione
  - ⋆ compito di scrittura su superficie orizzontale



  - ⋆ compito di lancio di un peso in direzione orizzontale



Manipolatori ridondanti

- Per una data configurazione q, trovare le soluzioni $\dot{q}$ che soddisfino

$$v = J\dot{q}$$

e che minimizzino

$$g(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T \boldsymbol{W} \dot{q}$$

⋆ *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*

$$g(\dot{q}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T \boldsymbol{W} \dot{q} + \boldsymbol{\lambda}^T (v - J\dot{q})$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{q}}\right)^T = \mathbf{0} \qquad \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \mathbf{0}$$

⋆ soluzione ottima

$$\dot{q} = \boldsymbol{W}^{-1} J^T (J \boldsymbol{W}^{-1} J^T)^{-1} v$$

J rango pieno!

⋆ se $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}$

$$\dot{q} = J^{\dagger} v$$

ove

$$J^{\dagger} = J^T (J J^T)^{-1}$$

è la *pseudo-inversa destra* di J

Più in generale, se $J = U \Sigma V^T$ è la s.v.d. di J cioè

$J J^T = U \Sigma \Sigma^T U^T$; $J^T J = V \Sigma^T \Sigma V^T$; $U^T U = I_m$; $V^T V = I_n$; $\Sigma = \left(\begin{array}{c} \mathrm{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_r) \\ \hline (m-r)\emptyset \end{array}\right)$

allora $J^+ = V \Sigma^+ U^T$, $\Sigma^{+} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{diag}\, 1/\sigma_i & \emptyset_{m-r} \\ \hline \emptyset_{m-r} & /// \end{array}\right)$

- Utilizzo della ridondanza

$$g'(\dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^T - \dot{q}_a^T)(\dot{q} - \dot{q}_a)$$

$\star$ come sopra ...

$$g'(\dot{q}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^T - \dot{q}_a^T)(\dot{q} - \dot{q}_a) + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{J}\dot{q})$$

$\star$ soluzione ottima

$$\dot{q} = \boldsymbol{J}^\dagger \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{J}^\dagger \boldsymbol{J})\dot{q}_a$$

$$= v + \emptyset$$

- Caratterizzazione dei moti interni

$$\dot{\boldsymbol{q}}_a = k_a \left(\frac{\partial w(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^T$$

⋆ *misura di manipolabilità*

$$w(\boldsymbol{q}) = \sqrt{\det\big(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\big)}$$

⋆ *distanza dai fine-corsa dei giunti*

$$w(\boldsymbol{q}) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2$$

⋆ *distanza da un ostacolo*

$$w(\boldsymbol{q}) = \min_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{o}} \|\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{o}\|$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma \to \infty$

$\begin{cases} \det = 1 \\ N_c = 0 \end{cases}$

INVERSIONE DELLA CINEMATICA DIFFERENZIALE

- Equazione cinematica non lineare
- Equazione cinematica differenziale lineare nelle velocità
- Data $\boldsymbol{v}(t)$ + condizioni iniziali $\Longrightarrow$ $(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t))$

  ⋆ se $n = r$

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{q}(t) = \int_0^t \dot{\boldsymbol{q}}(\varsigma)d\varsigma + \boldsymbol{q}(0)$$

  ⋆ regola di integrazione numerica (Eulero)

$$\boldsymbol{q}(t_{k+1}) = \boldsymbol{q}(t_k) + \dot{\boldsymbol{q}}(t_k)\Delta t$$

ALGORITMI PER L'INVERSIONE CINEMATICA

- Inversione cinematica

$$\boldsymbol{q}(t_{k+1}) = \boldsymbol{q}(t_k) + \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{q}(t_k))\boldsymbol{v}(t_k)\Delta t$$

  ⋆ fenomeni di *deriva* della soluzione

- Soluzione algoritmica

  ⋆ *errore nello spazio operativo*

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}} &= \dot{\boldsymbol{x}}_d - \dot{\boldsymbol{x}} \\ &= \dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\end{aligned}$$

  ⋆ trovare $\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{e})$: $\quad \boldsymbol{e} \to \boldsymbol{0}$

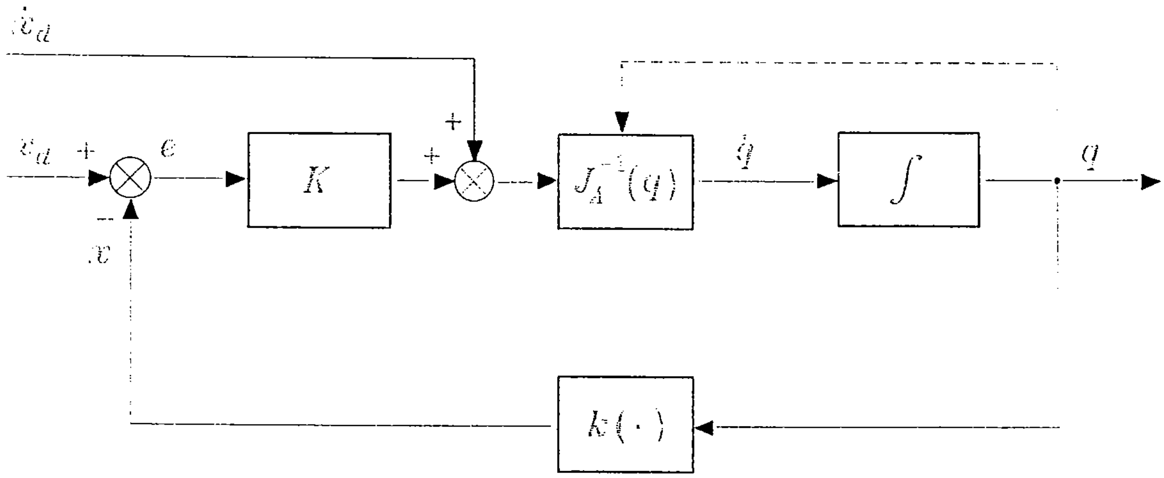
(Pseudo-)inversa dello Jacobiano (Newton-Raphson)

- Linearizzazione della dinamica di errore

$$\dot{q} = J_A^{-1}(q)(\dot{x}_d + Ke)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{e} + Ke = 0$$



⋆ Per un *manipolatore ridondante*

$$\dot{q} = J_A^{\dagger}(\dot{x}_d + Ke) + (I - J_A^{\dagger}J_A)\dot{q}_a$$

Trasposta dello Jacobiano (Metodo del Gradiente!

- $\dot{q} = \dot{q}(e)$ senza linearizzare la dinamica di errore

- Metodo di Lyapunov

$$V(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}$$

ove

$$V(\boldsymbol{e}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0} \qquad V(\boldsymbol{0}) = 0$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{e}) &= \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}} \\ &= \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\end{aligned}$$

$\star$ la scelta

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_A^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}$$

comporta che

$$\dot{V}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{K}\dot{\boldsymbol{x}}_d - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{J}_A(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}_A^T(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}$$

$\star$ se $\dot{\boldsymbol{x}}_d = \boldsymbol{0} \implies \dot{V} < 0$ con $V > 0$ (*asintotica stabilità*)

$\star$ se $\mathcal{N}(\boldsymbol{J}_A^T) \neq \emptyset \implies \dot{V} = 0$ se $\boldsymbol{K}\boldsymbol{e} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{J}_A^T)$
$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$ con $\boldsymbol{e} \neq \boldsymbol{0}$ (stallo?)

Singolarità cinematiche

- Le soluzioni precedenti valgono solo se $\boldsymbol{J}$ è di rango pieno

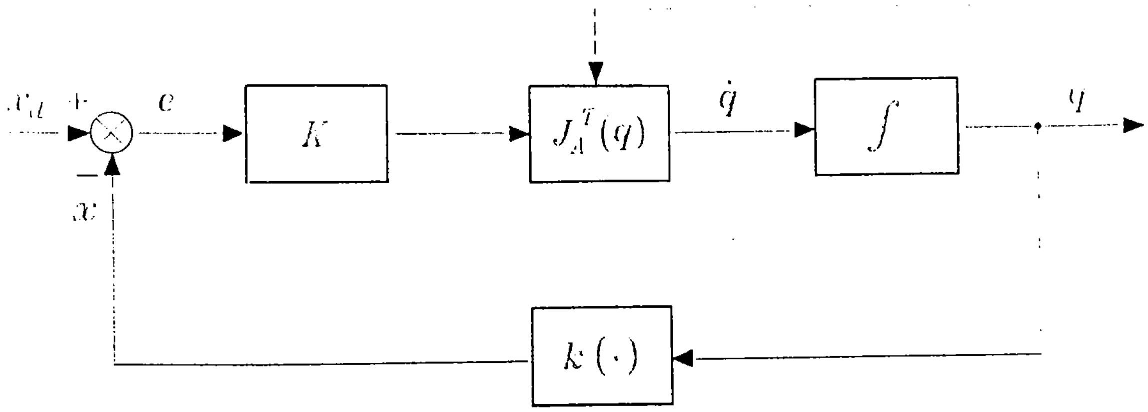
- Se $\boldsymbol{J}$ *non* è di rango pieno (singolarità)
  - ⋆ se $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}(\boldsymbol{J}) \implies$ soluzione $\dot{\boldsymbol{q}}$ estraendo tutte le equazioni linearmente indipendenti (traiettoria "fisicamente" eseguibile)
  - ⋆ se $\boldsymbol{v} \notin \mathcal{R}(\boldsymbol{J}) \implies$ il sistema non è risolvibile (traiettoria non eseguibile)

- Inversione nell'intorno di singolarità
  - ⋆ $\det(\boldsymbol{J})$ piccolo $\implies$ $\dot{\boldsymbol{q}}$ elevate
  - ⋆ *inversa a minimi quadrati smorzata*

$$\boldsymbol{J}^{\star} = \boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^T + k^2\boldsymbol{I})^{-1}$$

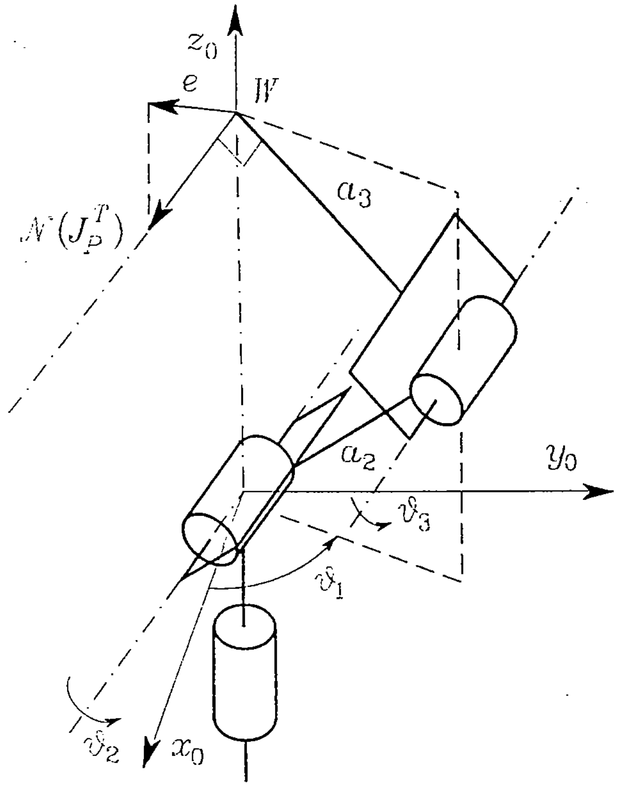
ove $\dot{\boldsymbol{q}}$ minimizza

$$g''(\dot{\boldsymbol{q}}) = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}}\|^2 + k^2\|\dot{\boldsymbol{q}}\|^2$$

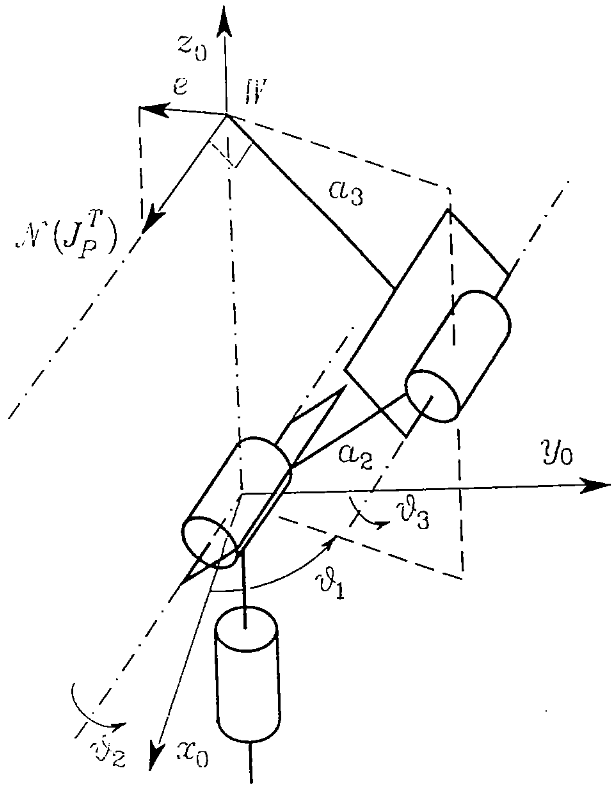


- Se $\dot{\boldsymbol{x}}_d \neq \mathbf{0}$
  - ⋆ $\boldsymbol{e}(t)$ limitato (conviene aumentare la norma di $\boldsymbol{K}$)
  - ⋆ $\boldsymbol{e}(\infty) \to \mathbf{0}$

- Interpretazione fisica dello schema con la trasposta dello Jacobiano
  - ⋆ dinamica ideale $\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{q}}$
  - ⋆ forza elastica $\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}$ che tira l'organo terminale verso la postura desiderata nello spazio operativo
  - ⋆ ha effetto solo se $\boldsymbol{K}\boldsymbol{e} \notin \mathcal{N}(\boldsymbol{J}^T)$



- Esempio



$$\boldsymbol{J}_P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & 0 \\ -a_3 c_1 s_{23} & -a_3 s_1 s_{23} & a_3 c_{23} \end{bmatrix}$$

$\star$ nullo di $\boldsymbol{J}_P^T$

$$\frac{\nu_y}{\nu_x} = -\frac{1}{\tan \vartheta_1} \qquad \nu_z = 0$$

Considerazioni sull'errore di orientamento

- Errore di posizione

$$e_P = p_d - p$$

$$\dot{e}_P = \dot{p}_d - \dot{p}$$

- Errore di orientamento

$$e_O = \phi_d - \phi$$

  - ⋆ agevole per assegnare l'andamento temporale $\phi_d(t)$
  - ⋆ richiede comunque il passaggio attraverso $R = [\,n \quad s \quad a\,]$

- Manipolatore con polso sferico   Polso "ZYZ"
  - ⋆ calcolare $q_P \quad \Longrightarrow \quad R_W$
  - ⋆ calcolare $R_W^T R_d \quad \Longrightarrow \quad q_O$ (angoli di Eulero ZYZ)

$$R_W^T R_d = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi = \text{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta = \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi = \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}) \end{cases}$$

- Note $\boldsymbol{R}_d = [\,\boldsymbol{n}_d \quad \boldsymbol{s}_d \quad \boldsymbol{a}_d\,]$ e $\boldsymbol{R} = [\,\boldsymbol{n} \quad \boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{a}\,]$, si calcola

$$\boldsymbol{R}_r(\vartheta) = \boldsymbol{R}_d \boldsymbol{R}^T$$

$\neq R_d - R$!

non è $SO(3)$

Sovrappone R a R_d

- errore di orientamento

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_O &= \boldsymbol{r} \sin\vartheta \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}_d + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{s}_d + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}_d) \end{aligned}$$

$\dot{R} = S(\omega) R$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_O = \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega}$$

ove

$$\boldsymbol{L} = -\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n}_d)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{s}_d)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}_d)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a})\big)$$

- Dinamica dell'errore

$$\begin{aligned} \dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}_P \\ \dot{\boldsymbol{e}}_O \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_d - \boldsymbol{J}_P(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \\ \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{L}\boldsymbol{J}_O(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_d \\ \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{\omega}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} \end{aligned}$$

J_q

pb.: $\omega_d(t)$?