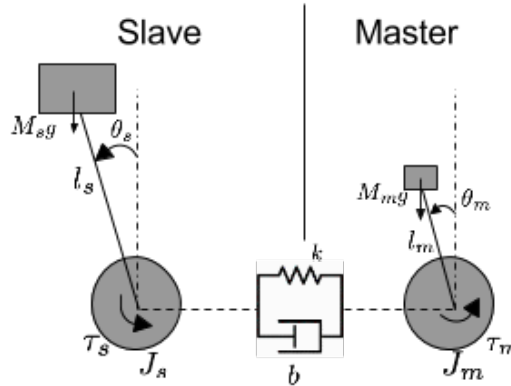


In Figura è riportato il modello di un dispositivo robotico per l'interazione con ambienti virtuali. Si desidera infatti controllare una massa virtuale (“slave”) per mezzo di una forza esercitata su un dispositivo denominato “master”. I dispositivi “master” e “slave” sono accoppiati attraverso un sistema molla-smorzatore virtuale.



Le equazioni del sistema sono:

$$\begin{cases} (J_m + l_m^2 M_m) \ddot{\theta}_m - gl_m M_m \sin \theta_m + k(\theta_m - \theta_s - \delta) + b(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_s) = \tau_m \\ (J_s + l_s^2 M_s) \ddot{\theta}_s - gl_s M_s \sin \theta_s - k(\theta_m - \theta_s - \delta) - b(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_s) = \tau_s \end{cases}$$

dove il pedice m indica le variabili associate al dispositivo “master” mentre il pedice s indica le variabili associate al dispositivo “slave”. J rappresenta il momento di inerzia del motore, l la lunghezza dell’asta e m una massa posta all’estremità dell’asta la quale è supposta a massa nulla. Inoltre, k e b sono rispettivamente i coefficienti elastico e di smorzamento del sistema di accoppiamento virtuale con precarico δ . Si indichi con θ l’angolo che forma l’asta rispetto alla verticale e con g l’accelerazione di gravità. Sia infine τ la coppia generata dal motore.

A.1 In condizioni di posizione verticale (angolo nullo) dell’asta master e ingresso del master nullo $\tau_m = 0$ si determinino la posizione e l’ingresso di equilibrio dell’asta slave.

A.2 Si determini la forma di stato del sistema linearizzato intorno all’equilibrio precedentemente calcolato considerando che è a disposizione il valore dell’angolo θ_s del dispositivo slave. Dati i valori numerici $J_m = 10 \text{ Nm}\cdot\text{s}^2$, $J_s = 12 \text{ Nm}\cdot\text{s}^2$, $M_m = 0.3 \text{ kg}$, $M_s = 50 \text{ kg}$, $l_m = 0.2 \text{ m}$, $l_s = 2 \text{ m}$, $b = 100 \text{ kg/s}$, $k = 10000 \text{ kg/s}^2$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\delta = 0.2 \text{ rad}$, si determinino le funzioni di trasferimento del sistema.

Verificare che le funzioni di trasferimento abbiano approssimativamente la forma

$$G_m(s) = \frac{0.047(s + 100)}{(s + 2)(s - 2)(s^2 + 10.46s + 1046)}, \quad G_s(s) = \frac{0.0047(s^2 + 9.988s + 998.7)}{(s + 2)(s - 2)(s^2 + 10.46s + 1046)}$$

in caso negativo, per i punti successivi, è possibile utilizzare le funzioni di trasferimento qui fornite.

A.3 Considerando il sistema linearizzato con ingressi $\tilde{\tau}_s$ e $\tilde{\tau}_m$, si progetti un controllore che, in caso di ingresso virtuale nullo $\tilde{\tau}_s = 0$, agendo sull’ingresso $\tilde{\tau}_m$ sia in grado di rendere il sistema asintoticamente stabile e verifichi le seguenti specifiche:

- a partire dalla condizione di equilibrio, l’asta slave venga portata in posizione verticale con un errore a regime inferiore al 1%. Che l’asta slave non superi mai il valore angolare $2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ e si assesti in un intorno del 5% del valore di regime entro un tempo $T = 1.5 \text{ s}$.
- il disturbo dovuto ad oscillazioni generate da una $\tilde{\tau}_s(t) = 0.1 \sin(t)$ sia minore del 5%.
- l’effetto del rumore sulla lettura dell’angolo θ_s della forma $\nu(t) = \sin(100t)$ sia minore del 1%.

Si riportino quindi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,

- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative,

Soluzione

A.1 Date $\theta_m = \tau_m = 0$ e $\ddot{\theta}_m = \ddot{\theta}_s = \dot{\theta}_m = \dot{\theta}_s = 0$, dalla prima equazione si ottiene $\theta_s = -\delta$ mentre dalla seconda equazione si determina l'ingresso di equilibrio $\tau_s = gl_s M_s \sin \delta$.

A.2 Si consideri lo stato $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\theta_m, \theta_s, \dot{\theta}_m, \dot{\theta}_s)$, il sistema in forma di stato risulta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{J_m + I_m^2 M_m} (gl_m M_m \sin x_1 - k(x_1 - x_2 - \delta) - b(x_3 - x_4) + \tau_m) \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{J_s + I_s^2 M_s} (gl_s M_s \sin x_2 + k(x_1 - x_2 - \delta) + b(x_3 - x_4) + \tau_s) \end{cases}$$

Il sistema linearizzato ha variabili di stato $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) = (x_1, x_2 + \delta, x_3, x_4)$ e ingressi $\tilde{\tau}_m = \tau_m$ e $\tilde{\tau}_s = \tau_s - gl_s M_s \sin \delta$. Le matrici del sistema dinamico sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{gl_m M_m - k}{J_m + I_m^2 M_m} & \frac{k}{J_m + I_m^2 M_m} & -\frac{b}{J_m + I_m^2 M_m} & \frac{b}{J_m + I_m^2 M_m} \\ \frac{k}{J_s + I_s^2 M_s} & \frac{gl_s M_s \cos \delta - k}{J_s + I_s^2 M_s} & \frac{b}{J_s + I_s^2 M_s} & -\frac{b}{J_s + I_s^2 M_s} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_m + I_m^2 M_m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_s + I_s^2 M_s} \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \quad D = 0$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -998.742 & 998.801 & -9.988 & 9.988 \\ 47.169 & -42.634 & 0.471 & -0.471 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.099 & 0 \\ 0 & 0.0047 \end{pmatrix}$$

Le funzioni di trasferimento del sistema risultano:

$$G_m(s) = \frac{0.047113(s + 100)}{(s + 2.082)(s - 2.082)(s^2 + 10.46s + 1046)}$$

$$G_s(s) = \frac{0.004717(s^2 + 9.988s + 998.7)}{(s + 2.082)(s - 2.082)(s^2 + 10.46s + 1046)}$$

Si nota che come previsto il sistema risulta instabile a causa della presenza di un polo a parte reale positiva. Nel progetto del controllore sarà pertanto necessario procedere con un controllo in cascata.

A.3 Lo schema di controllo proposto è riportato in figura 1

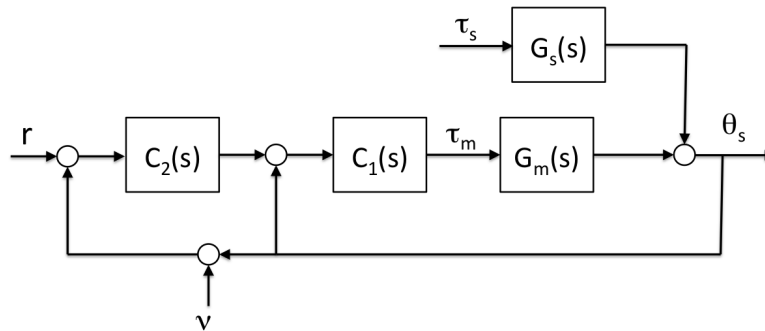


Figura 1: Schema a blocchi per il progetto del controllore

Si considera inizialmente il problema di stabilizzare il sistema. Il luogo delle radici del sistema G_m è riportato in figura 2.

Inserendo uno zero in -8 si riescono a richiamare i rami che giacciono nel semipiano destro. Ponendo anche un polo in -80 per rendere il controllore causale, e scegliendo una costante di guadagno pari a 15000 si ottiene il luogo delle radici riportato in figura 3. Pertanto con il controllore $C_1(s) = \frac{1.5e05(s+8)}{(s+80)}$ il sistema risulta stabile in anello chiuso.

Le funzioni di trasferimento del sistema e del disturbo in anello chiuso risultano rispettivamente:

$$G_{mc}(s) = \frac{7067(s+100)(s+8)}{(s+79.75)(s^2+9.075s+70.66)(s^2+1.63s+938.9)}$$

$$G_{dc}(s) = G_{sc}(s) = \frac{0.004717(s+80)(s^2+9.988s+998.7)}{(s+79.75)(s^2+9.075s+70.66)(s^2+1.63s+938.9)}$$

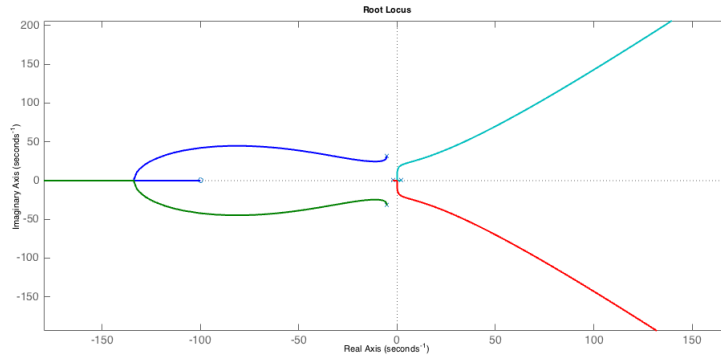


Figura 2: Luogo delle radici di $G_m(s)$

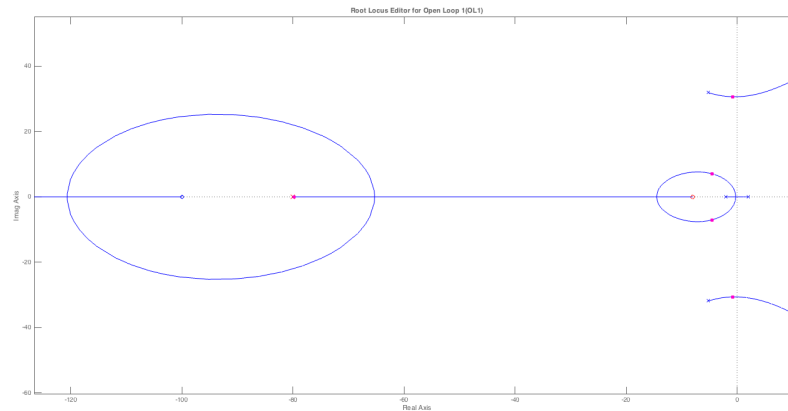


Figura 3: Luogo delle radici di $C_1(s)G_m(s)$

E' ora possibile progettare il controllore che verifica le specifiche. La prima specifica chiede di portare l'asta dello slave in posizione verticale a partire dalla posizione di equilibrio $\bar{\theta}_s = -0.2 \text{ rad}$. Si chiede quindi a regime un errore al gradino (di ampiezza 0.2) minore di 10^{-2} .

La costante di guadagno del controllore quindi deve verificare $\frac{1}{1+C_2(0)G_{mc}(0)} \leq 10^{-2}$. Essendo $G_{mc}(0) = 1$ si ha che il guadagno statico del controllore deve essere almeno 10^2 e pertanto il diagramma di bode della funzione di anello $C_2(s)G_{mc}(s)$ deve passare sopra i 40 db per basse pulsazioni.

Si chiede inoltre che l'asta non superi mai il valore angolare $2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ che corrisponde al 10% del gradino. Quindi si richiede una sovralongazione minore del 10% e un tempo di assestamento di 1.5 s . Questo corrisponde ad uno smorzamento maggiore di 0.6 (margine di fase di almeno 73° e una pulsazione di taglio maggiore di 3.3 rad/s).

La specifica sul disturbo corrisponde a richiedere che $\| \frac{G_{sc}(j\omega)}{1+C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)} \| \leq \frac{\|Y(j\omega)\|}{\|d(j\omega)\|}$ per $\omega < 0.1 \text{ rad/s}$. E' quindi sufficiente progettare il controllore affinché valga

$$\|C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)\| \geq \frac{\|G_{sc}(j\omega)\|}{0.05} = \|G_{sc}(j\omega)\|_{db} - (-26.0206).$$

Dal diagramma di bode di $G_{sc}(s)$, riportato in figura 4, si vede che per basse pulsazioni si ha $\|G_{sc}(j\omega)\|_{db} = -82.9$. Si chiede quindi che valga $\|C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)\|_{db} \geq -56.8794 \text{ db}$. Questa specifica è verificata una volta che venga verificata quella sull'errore al gradino.

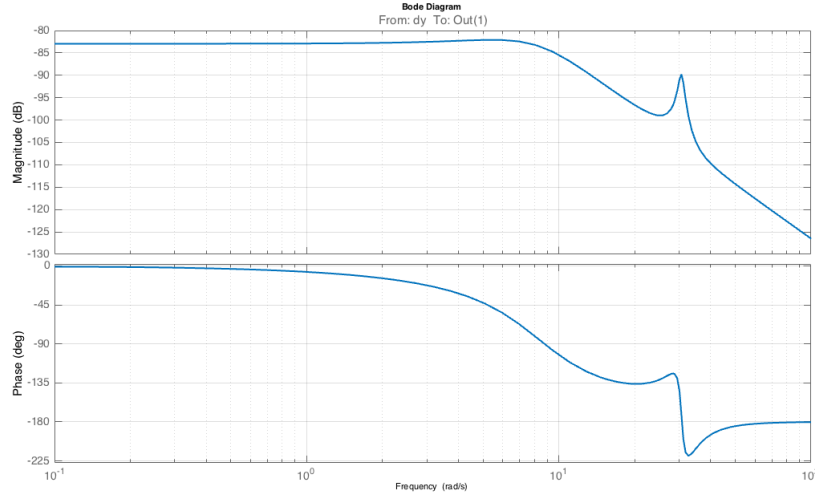


Figura 4: Diagramma di Bode di $G_{sc}(s)$

La specifica sul rumore di misura equivale a richiedere che $\| \frac{C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)}{1+C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)} \| \leq \frac{\|Y(j\omega)\|}{\|v(j\omega)\|}$ per $\omega > 100 \text{ rad/s}$. Alle alte pulsazioni si ha che $\| \frac{C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)}{1+C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)} \|$ è approssimabile con $\|C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)\|$ e quindi il controllore deve verificare $\|C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)\| \leq 10^{-2}$ che corrisponde a $\|C_2(j\omega)G_{mc}(j\omega)\|_{db} \leq -40$.

Il diagramma di Bode della $G_{mc}(s)$ con le specifiche da rispettare è riportato in figura 5.

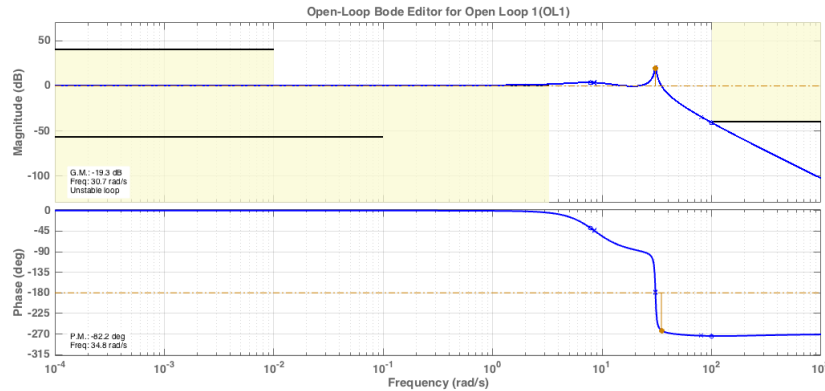


Figura 5: Diagramma di Bode di $G_{mc}(s)$ con specifiche da verificare.

Per verificare la specifica sull'errore al gradino è necessario aumentare la costante di guadagno (oppure inserire un polo nell'origine). Considerando una costante di guadagno $K = 100$ si ottiene che il sistema in anello chiuso risulta instabile (taglio in 95.8 rad/s). Per avere un buon margine di fase è necessario avere una pulsazione di taglio più bassa di 20 rad/s dopo la quale la fase diminuisce bruscamente. E' quindi necessario inserire un polo ad esempio in -0.03 . Alzando leggermente il guadagno a 120 si ha che tutte le specifiche vengono verificate come si può notare in figura 6 dove si riportano i diagrammi di Bode di $C_2(s)G_{mc}(s)$ con $C_2(s) = 120 \frac{1}{1+033s}$.

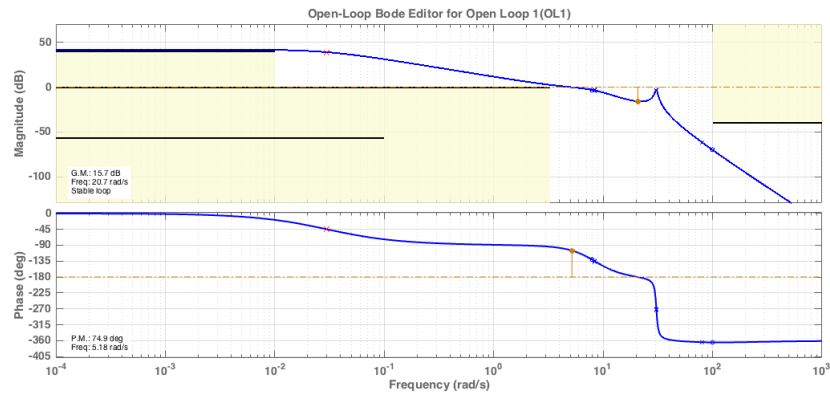


Figura 6: Diagramma di Bode di $C_2(s)G_{mc}(s)$ con specifiche rispettate

La risposta al gradino del sistema in anello chiuso così ottenuto è riportato in figura 7 verificando che le specifiche sono rispettate.

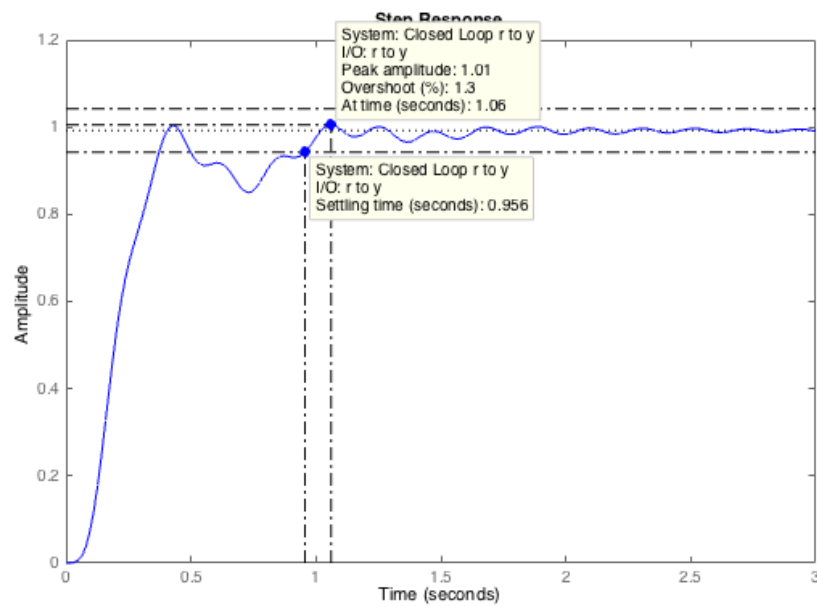


Figura 7: Risposta al gradino sistema controllato