

Figura 1: Schema di centrifuga industriale: a) vista in assonometria b) vista frontale.

- A** In Fig.1.a è riportato lo schema semplificato di una centrifuga orizzontale industriale di media potenza. Un motore genera una coppia τ_m sull'asse centrale della camera della centrifuga di raggio R . La camera ha un contenuto viscoso e parzialmente comprimibile che, per velocità trascurabili, si trova ad una distanza media d_0 dal centro, Fig. 1.b. Portando il sistema ad una rotazione costante $\bar{\omega}$ il materiale si dispone ad una distanza media d dal centro. L'inerzia $I(d)$, in funzione della distanza d , associata al contenuto centrifugato è approssimabile a quella di un toroide di massa m . Detti k e b i parametri viscoelastici del contenuto e D il parametro di attrito viscoso agente sul sistema motore/centrifuga, la dinamica del sistema risulta:

$$\begin{cases} m\ddot{d} = m\omega^2 R + k(d_0 - d) - b\dot{d}, \\ I(d)\dot{\omega} = \tau_m - D\omega. \end{cases} \quad \text{con } I(d) = \frac{1}{8}(4d^2 + 5(R - d)^2)m. \quad (1)$$

- A.1** Si determinino i punti di equilibrio del sistema considerando una velocità di rotazione costante $\bar{\omega}$.
- A.2** Si considerino i seguenti valori numerici: $m = 40[kg]$, $\bar{\omega} = 1.4835[rad/s]$, $R = 1.5[m]$, $k = 1000[N/m]$, $b = 0.8[Ns/m]$, $d_0 = 1.2[m]$, $D = 0.5[Nms/rad]$. Avendo a disposizione la misura della distanza d dall'asse, si determini la forma di stato del sistema linearizzato intorno all'equilibrio precedentemente calcolato. Si ricavano le funzioni di trasferimento associate agli ingressi discutendone la stabilità.
- Si confronti il risultato ottenuto con le seguenti funzioni di trasferimento. In caso di sostanziali differenze si prosegua il compito con le funzioni riportate:

$$G_m(s) = \frac{0.1}{s^3 + 0.03s^2 + 25s + 0.3}$$

- A.3** Si vuole progettare un controllore che, misurando la distanza d , sia in grado di portare la centrifuga ad avere una velocità angolare esattamente pari a $\omega^* = 2[rad/s]$, raggiungendo, senza poi uscirne, un intervallo $\omega_I = [\omega^-, \omega^+] = [1.99, 2.01][rad/s]$ entro un tempo $T = 10[s]$. Si consideri inoltre che il modello lineare trovato ai punti precedenti risulta non sufficientemente accurato per distanze $d > d_{max} = 1.45[m]$. Il controllore da progettare deve quindi garantire che il sistema controllato evolva nella regione di accuratezza del modello lineare.
- A.4** Considerando un disturbo sulle uscite della forma $\tilde{d}(t) = 2 + \sin(10^{-1}t)$, si vuole che, grazie al controllore, l'effetto del disturbo sull'uscita sia minore del 10%.

Inoltre i sensori che misurano la distanza d sono affetti da rumore della forma $\nu(t) = 0.01 \sin(100t)$ e pertanto si vuole che, grazie al controllore, l'effetto del rumore sull'uscita sia minore dell'1%.

Si riportino quindi:

- Lo schema di controllo utilizzato
- Le funzioni di trasferimento del controllore
- I diagrammi di Bode con le specifiche, durante le fasi del progetto
- La risposta al gradino del sistema controllato

Soluzione

A.1 Scegliendo lo stato del sistema come $x = [d \ \dot{d} \ \omega]^T$, gli equilibri sono caratterizzati da $\bar{x} = [\frac{m\omega^2 R}{k} + d_0 \ 0 \ \bar{\omega}]^T = [1.3321 \ 0 \ 1.4835]^T$ e ingresso d'equilibrio $\bar{\tau}_m = D\bar{\omega} = 0.7418[Nm]$.

A.2 Il sistema linearizzato in forma di stato risulta:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} & 2\bar{\omega}R \\ 0 & 0 & -\frac{D}{I(\bar{d})} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{I(\bar{d})} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0], \quad D = [0 \ 0].$$

Sostituendo i valori numerici ($\bar{d} = 1.3321$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -25 & -0.02 & 4.4506 \\ 0 & 0 & -0.0138 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0276 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0], \quad D = [0 \ 0].$$

La funzione di trasferimento $G_m(s)$ risulta:

$$G_m(s) = \frac{2\omega R}{I(\bar{d})} \frac{1}{\left(\frac{D}{I(\bar{d})+s}\right)\left(\frac{k}{m} + \frac{b}{m}s + s^2\right)} = \frac{0.123}{s^3 + 0.03382s^2 + 25s + 0.3454}$$

A.3 Si passa ora ad analizzare le specifiche.

[A.3.1] Dato che la variabile di uscita non è la velocità angolare ω ma la distanza d , le specifiche vanno riportate in tale variabile. Questo è possibile in quanto la relazione tra ω e d è, nel range dei valori in esame, una funzione strettamente crescente.

Si chiede innanzitutto che il valore di riferimento $\omega^* = 2[rad/s]$ venga raggiunto esattamente. Tale valore di riferimento corrisponde ad una distanza $d^* = f(\omega^*) = \frac{m\omega^{*2}R}{k} + d_0 = 1.44[m]$. Per verificare tale specifica sarà necessario inserire un polo nell'origine del controllore.

I valori richiesti per l'assestamento della velocità angolare sono: $[\omega^-, \omega^+] = [1.99, 2.01][rad/s]$ che, in termini di distanza, corrispondono a $[d^-, d^+] = [1.4376, 1.4424][m]$.

Il gradino richiesto al sistema è $d_{step} = d^* - \bar{d} = 1.44 - 1.3321 = 0.1079[m]$ e si vuole che entri in un intervallo le cui tolleranze percentuali sono $[P^+, P^-]$ dove:

$$P^+ = \frac{d^+ - d^*}{d^* - \bar{d}} \quad P^- = \frac{d^- - d^*}{d^* - \bar{d}}, \quad (2)$$

ottenendo $[-2.22\%, 2.23\%]$ per cui richiedendo al sistema controllato un tempo di assestamento calcolato al 2% le specifiche richieste sulle velocità angolari sono verificate.

[A.3.2] La specifica sul mantenimento dell'evoluzione della distanza nella regione di accuratezza del modello lineare corrisponde a chiedere che la distanza non superi mai il valore massimo $d_{max} = 1.45[m]$. Si ha quindi una richiesta sulla sovraelongazione massima da garantire alla risposta al gradino del sistema in anello chiuso:

$$S_{max} = \frac{d_{max} - d^*}{d^* - \bar{d}} = 9.26\%,$$

Tale valore di sovraelongazione massima corrisponde a chiedere al sistema in anello chiuso uno smorzamento dei poli minimo: $S = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 9.26$ da cui $\delta > 0.6037$. Questo si può verificare garantendo all'anello aperto un margine di fase di $M_\phi > 74.27^\circ$ (nel caso di buona approssimazione a poli dominanti).

Come già visto, le specifiche sul tempo di assestamento sulla velocità angolare ω equivalgono al $p = 2\%$ di d_{step} con $T = 10[sec]$ che corrisponde a chiedere una pulsazione di taglio della funzione di anello sufficientemente grande. In particolare deve essere

$$\omega_T > \frac{-\log(p) + \log(\sqrt{1-\delta^2})}{\delta T_a} > 0.9309 rad/s. \quad (3)$$

A.4 Si richiede che un disturbo $\tilde{d}(t) = 2 + \sin(10^{-1}t)$, non produca a regime un errore superiore a $\pm 10\%$. Inoltre si richiede che un disturbo di misura $\nu(t) = 0.01 \sin(100t)$ non produca a regime un errore superiore a $\pm 1\%$. La componente costante del disturbo viene reiettata completamente a regime grazie all'inserimento di un polo nell'origine nel controllore come da specifiche trattate nel punto precedente.

Per quanto riguarda la componente sinusoidale si consideri la funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita: $G_d(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}$. Si chiede che, alle pulsazioni di interesse, il rapporto tra l'uscita e il disturbo sia minore del 10% e pertanto che $\|G_d(j10^{-1})\| \leq 0.1$ da cui segue $\|1 + C(j\omega)G(j\omega)\| \geq 10 = 20dB$ per $\omega \leq 10^{-1}rad/s$. A tali pulsazioni si ha $\|C(j\omega)G(j\omega)\| \gg 1$ e pertanto è sufficiente progettare un controllore che garantisca che $\|C(j\omega)G(j\omega)\| \geq 20dB$ per $\omega \leq 10^{-1}rad/s$.

Per quanto riguarda il rumore di misura, la funzione di trasferimento tra il rumore e l'uscita risulta $-\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$.

La specifica richiede che ad alte frequenze $\omega > 100 rad/s$ il rumore venga attenuato di almeno l'1% sull'uscita dal controllore, Quindi si richiede un controllore per cui $\|\frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1+C(j\omega)G(j\omega)}\| \leq 0.01$ per $\omega \geq 100rad/s$. A tali pulsazioni si ha $\|C(j\omega)G(j\omega)\| \ll 1$ (la pulsazione di taglio si aggira intorno ai $0.9309rad/s$) e pertanto è sufficiente progettare un controllore per cui $\|C(j\omega)G(j\omega)\| \leq 0.01 = -40dB$ per $\omega \geq 100rad/s$.

In figura 2 sono riportati i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G_m(s)$ con le specifiche da rispettare.

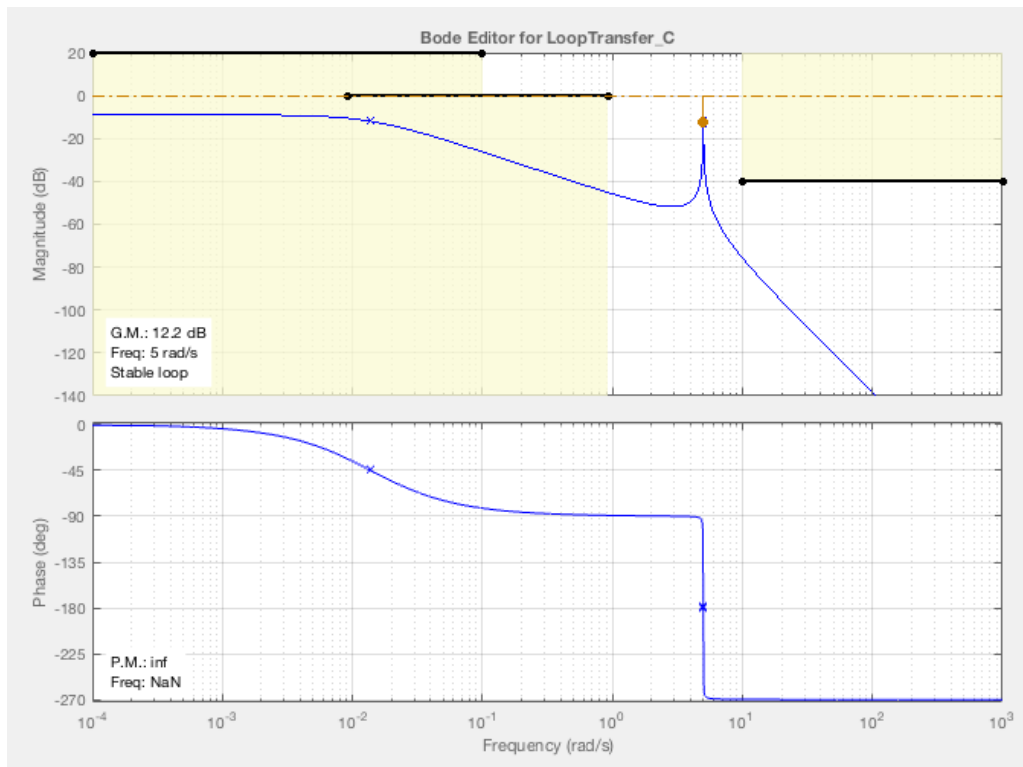


Figura 2: Diagrammi di Bode di $G_m(s)$ con le specifiche da rispettare.

Come richiesto dalle specifiche, si consideri innanzitutto il controllore con un polo nell'origine $C(s) = \frac{1}{s}$. In figura 3 sono riportati i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $\frac{1}{s}G_m(s)$ con le specifiche da rispettare.

Si inseriscano due zeri nel controllore che vadano ad attenuare gli effetti dei poli complessi del sistema: $-0.02 \pm j4.9$, $C(s) = \frac{(s^2+0.04s+24)}{s}$. In figura 4 sono riportati i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $\frac{(s^2+0.04s+24)}{s}G_m(s)$ con le specifiche da rispettare.

Infine si inserisce una rete anticipatrice (zero in -0.02 e polo in -3.3) in modo da verificare le specifiche richieste (modificando anche la costante di guadagno) ed in particolare andando ad aumentare il margine di fase: $C(s) = \frac{(s^2+0.04s+24)}{s}$.

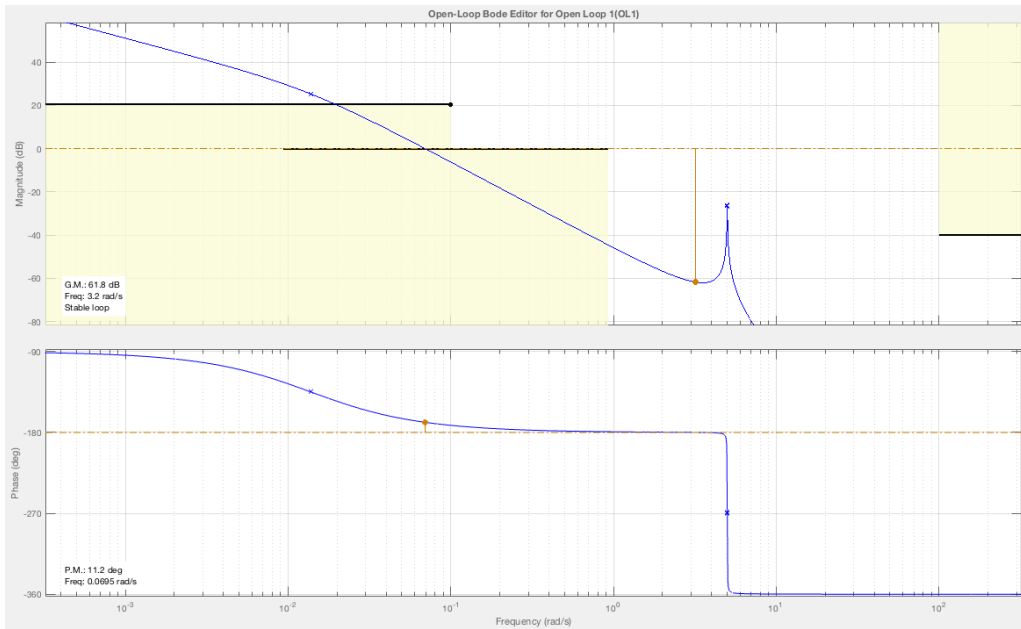


Figura 3: Diagrammi di Bode di $\frac{1}{s}G_m(s)$ con le specifiche da rispettare.

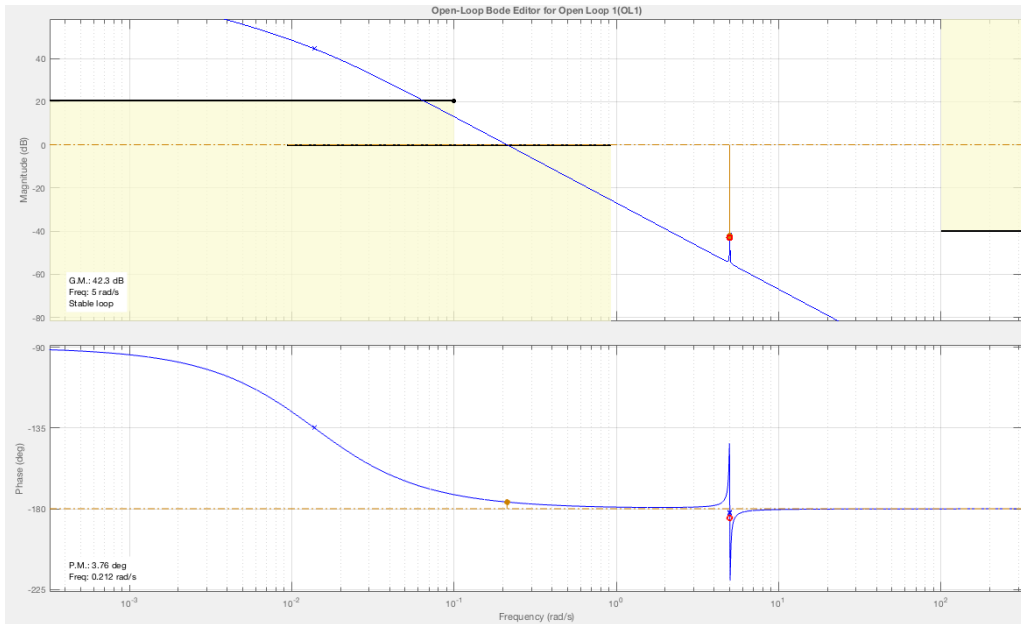


Figura 4: Diagrammi di Bode di $\frac{(s^2+0.04s+24)}{s}G_m(s)$ con le specifiche da rispettare.

Affinchè il controllore sia causale si inserisce un polo in alta frequenza in -141 . Il controllore ottenuto risulta: $C(s) = 4600 \frac{(s+0.02)(s^2+0.04s+24)}{s(s+3.3)(s+141)}$. In figura 5 sono riportati i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $C(s)G_m(s)$ con le specifiche da rispettare.

In figura 6 è riportata la risposta al gradino del sistema in anello chiuso.

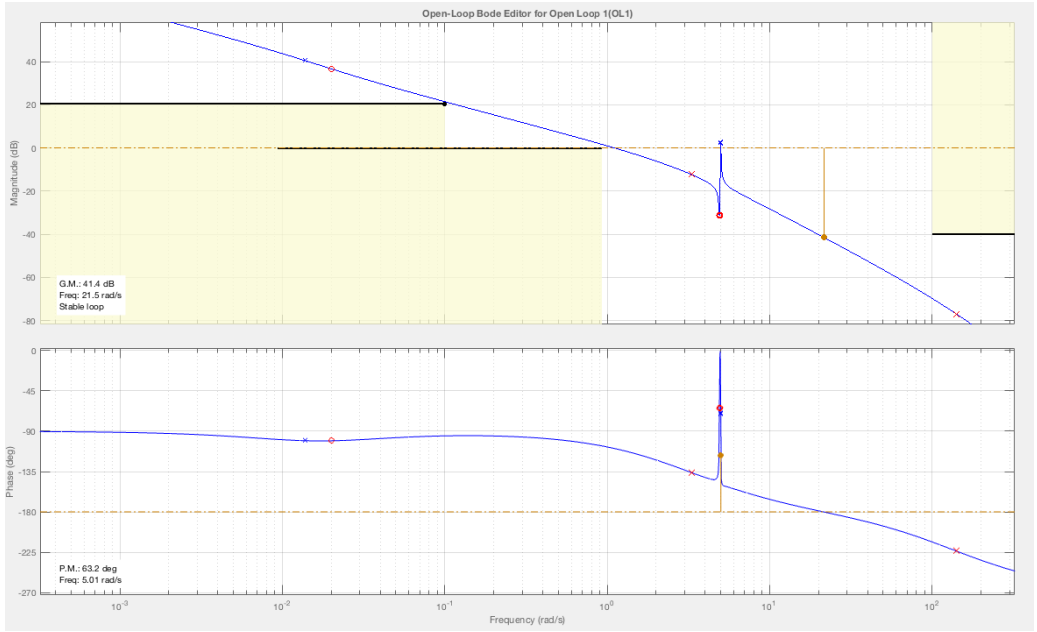


Figura 5: Diagrammi di Bode di $C(s)G_m(s)$ con le specifiche da rispettare.

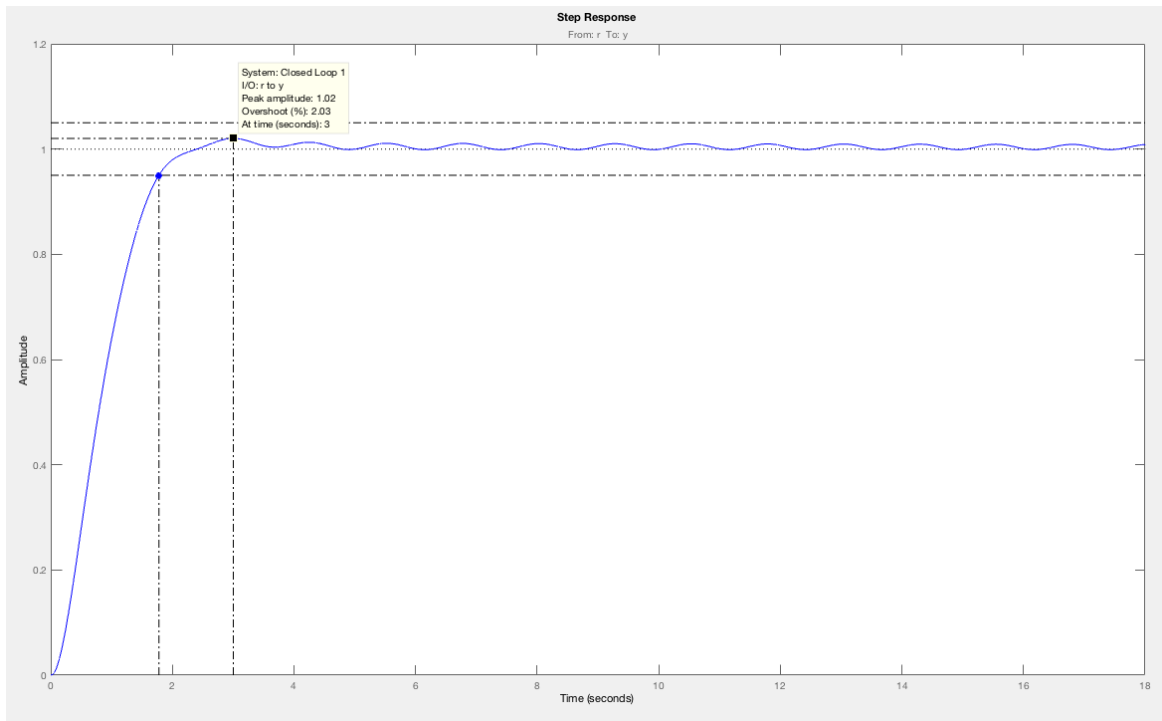


Figura 6: Risposta al gradino del sistema controllato