



Principi di Bioingegneria

A.A. 2022/23

Lezione 13

Analisi dei segnali biomedici
Esercitazione 2

Vincenzo Catrambone, PhD
vincenzo.catrambone@unipi.it



Trasformata di Fourier di una sequenza

Trasformata discreta di Fourier

Algoritmo FFT

Zero-padding, troncamento

Esercitazione

Trasformata di Fourier di una sequenza

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T}$$

La trasformata è una funzione della variabile continua f .

È possibile esprimere la TF della sequenza in funzione della frequenza normalizzata $F = fT$.

La TF risulta periodica in f di periodo $f = 1/T$ infatti:

$$\bar{X}\left(f + \frac{1}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n \left(f + \frac{1}{T}\right) T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} e^{-j2\pi n} = \bar{X}(f)$$

Trasformata di Fourier di una sequenza

L'operazione inversa (antitrasformata) permette di ricavare $x[n]$ a partire dalla trasformata di Fourier

$$x[n] = \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{X}(f) e^{j2\pi n f T} df$$

La relazione ricorda quella ottenuta per i segnali tempo continui, con la differenza che l'integrale è esteso ad un periodo della $\bar{X}(f)$.

Questo implica che la sequenza può essere ricostruita utilizzando le frequenze comprese nell'intervallo finito $[-1/2T, 1/2T]$.

Questo fatto si può spiegare pensando alla periodicità della trasformata per cui le informazioni significative per la ricostruzione del segnale sono ottenibili analizzando un solo periodo della trasformata.

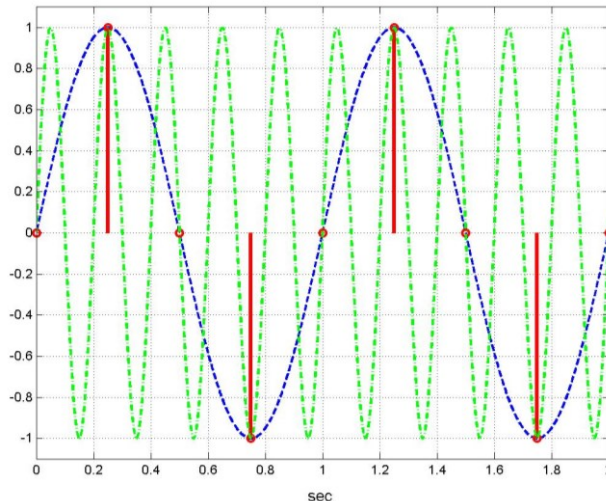
Se utilizziamo la frequenza normalizzata il periodo base si riduce all'intervallo di fT , $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Trasformata di Fourier di una sequenza

La periodicità di $\bar{X}(f)$ implica che due oscillazioni a frequenza f_1 e $f_1 + k/T$, con f_1 generico, sono equivalenti

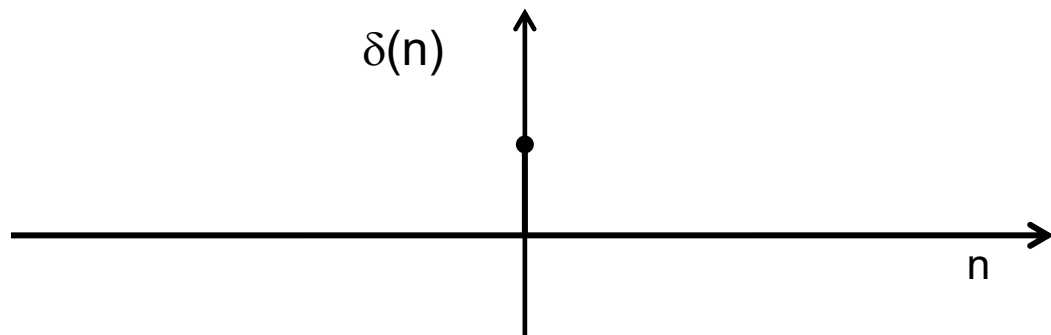
$$e^{j2\pi n\left(f_1 + \frac{k}{T}\right)T} = e^{j2\pi n f_1 T} e^{j2\pi n k} = e^{j2\pi n f_1 T}$$

Per esempio, scegliamo un tempo di campionamento pari a $4\text{Hz} = 1/T$ con $T = 0.25 \text{ sec}$. Con questo intervallo di campionamento l'intervallo base di frequenze necessarie e sufficienti per ricostruire la sequenza è $[-2\text{Hz}, 2\text{Hz}]$. Consideriamo una oscillazione sinusoidale a frequenza $f_1 = 1\text{Hz}$. Allora, dato T , questa oscillazione è indistinguibile da tutte quelle a frequenza $1\text{Hz} + k * 4\text{Hz}$, con k intero: quindi 5Hz , 9Hz etc.

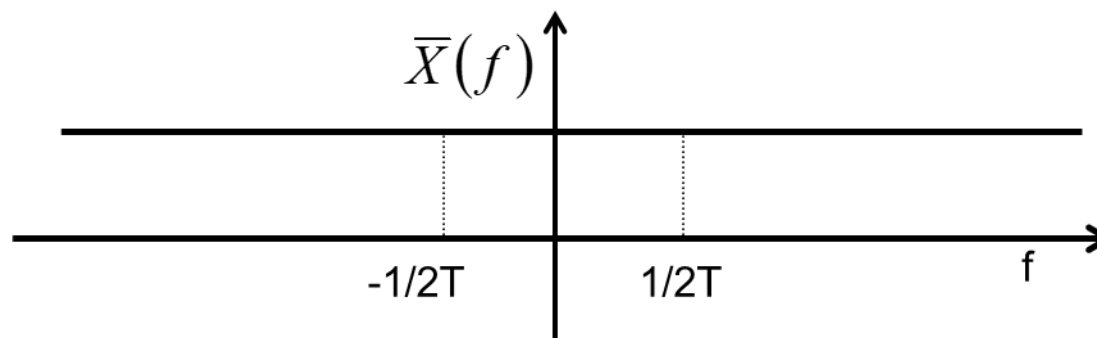


La figura a sinistra mostra come le due oscillazioni a 1Hz (linea blu) e 5Hz (linea verde) diano origine alla stessa sequenza se campionate con $T = 0.25 \text{ sec}$. Questo fenomeno porta poi al problema dell'Aliasing, sostanzialmente quando avviene un sottocampionamento del segnale.

Esempi di TF di sequenze

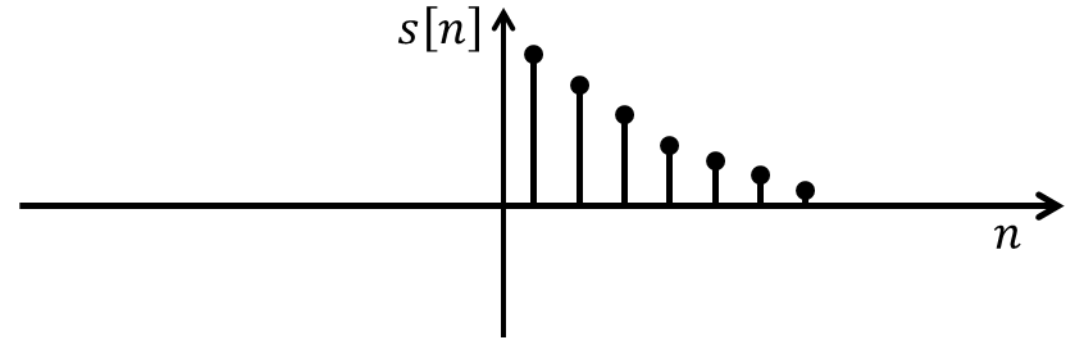


$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j2\pi n f T} = 1$$

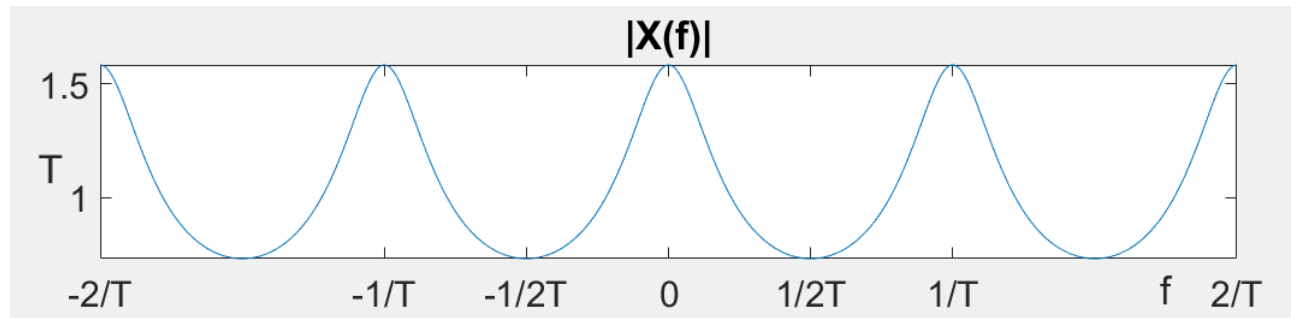


Esempi di TF di sequenze

$$s[n] = \frac{1}{T} e^{-n} u[n]$$

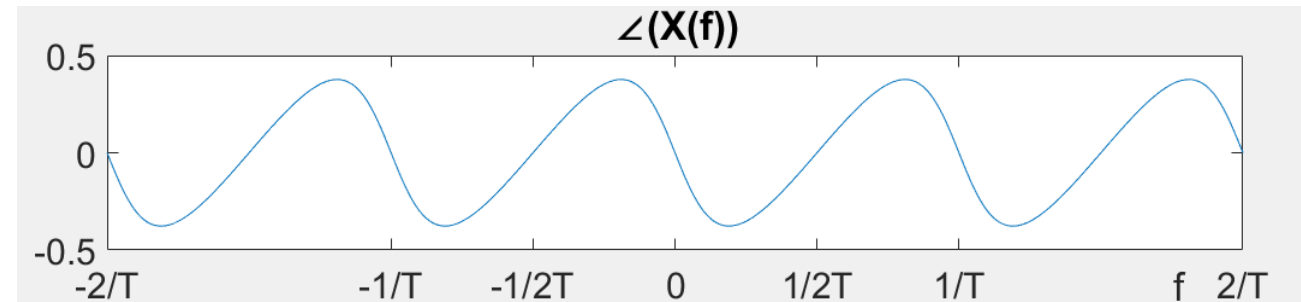


$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{-j2\pi n f T} = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+j2\pi f T)n} = \frac{1}{T} * \frac{1}{1 - e^{-(1+j2\pi f T)}}$$



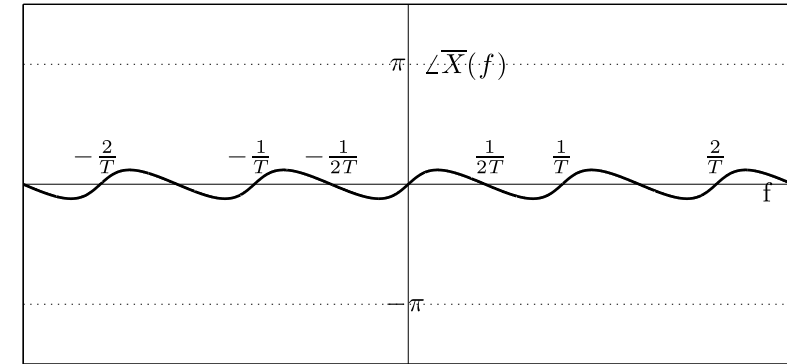
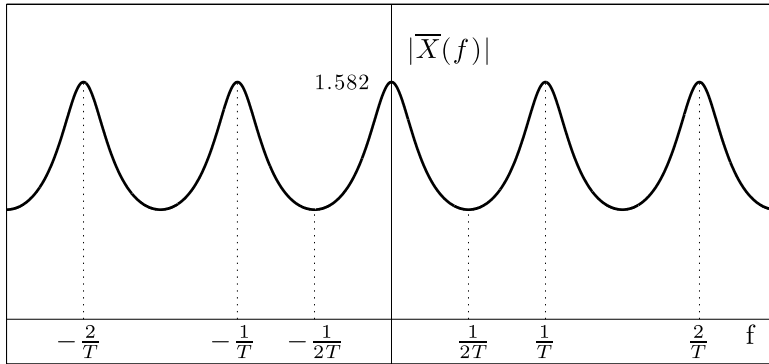
Visto che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

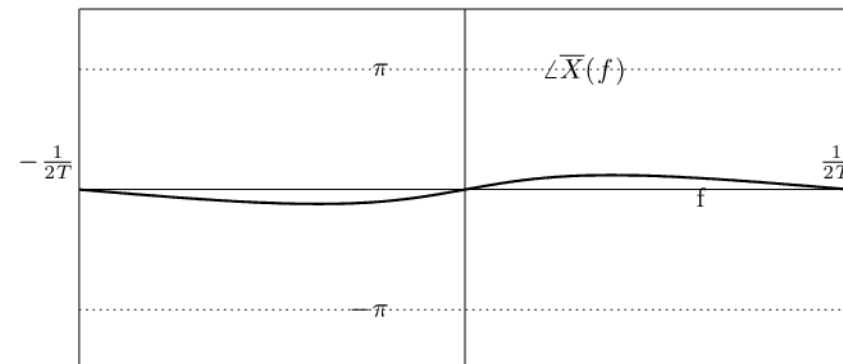
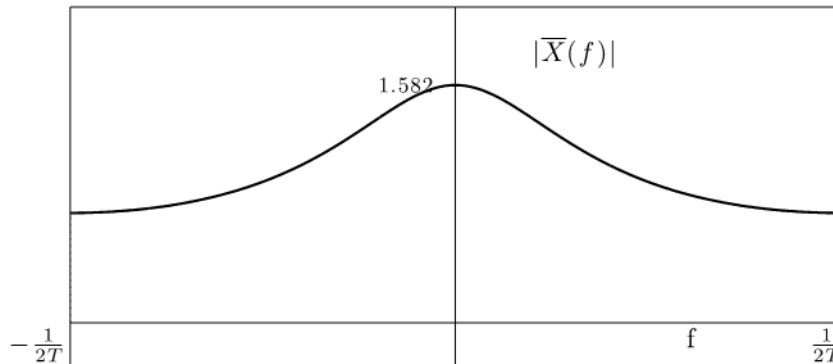


Esempi di TF di sequenze

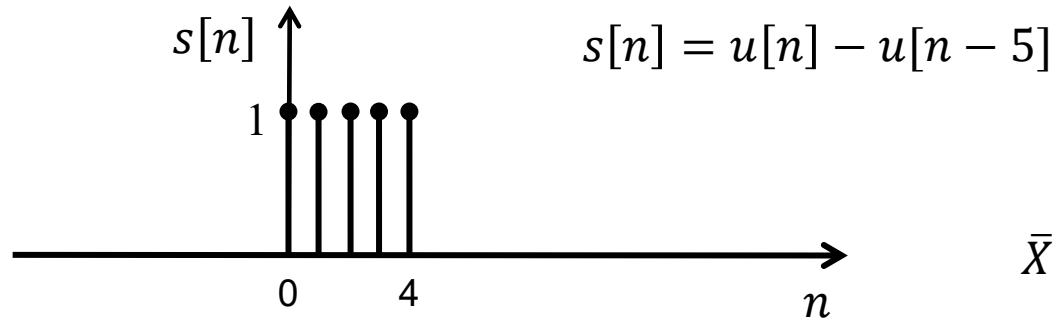
Da queste figure si vede la periodicità della TF



Quello che solitamente viene rappresentato è l'intervallo di frequenze in un periodo (quindi da $-\frac{f_c}{2}$ a $\frac{f_c}{2}$ dove $f_c = 1/T$ è la frequenza di campionamento)



Esempi di TF di sequenze

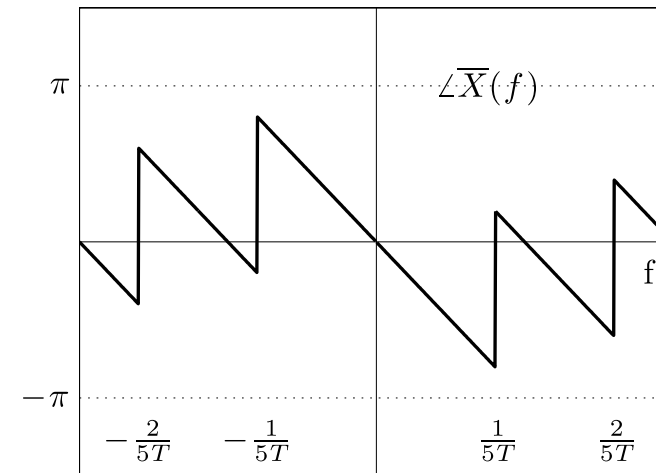
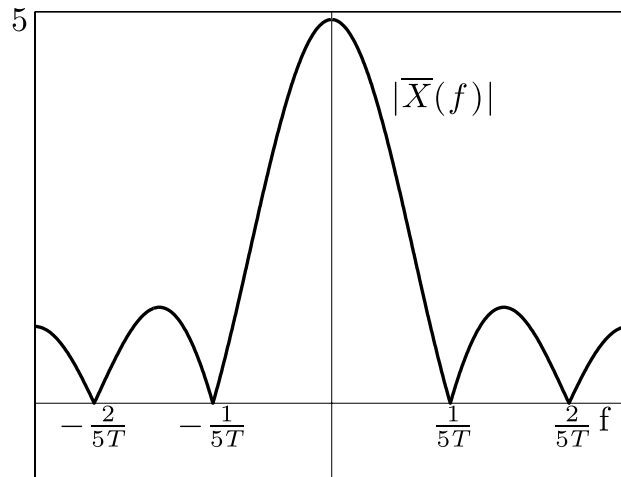


$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=0}^4 e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=0}^4 (e^{-j2\pi f T})^n =$$

Visto che

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1 - a^N}{1 - a}$$

$$= \frac{1 - e^{-j2\pi f T 5}}{1 - e^{-j2\pi f T}} = \frac{e^{-j\pi f T 5} e^{j\pi f T 5} - e^{-j\pi f T 5}}{e^{-j\pi f T} e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}} = e^{-j4\pi f T} \frac{\sin(\pi f T 5)}{\sin(\pi f T)}$$



Esempi di TF di sequenze

Così come nel caso dei segnali a tempo continuo, così nel caso di sequenze è possibile estendere la TF a sequenze periodiche introducendo la delta di Dirac

Per esempio nel caso della sequenza costante $x[n] = 1$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f T}$$

Per trovare quanto vale questa sommatoria bisogna ricordare lo Sviluppo in Serie del pettine di Delta di Dirac

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k t / T}$$

Da cui trasformando ambo i membri (utilizzando la proprietà di traslazione nel tempo, a sinistra, e quella di modulazione, a destra)

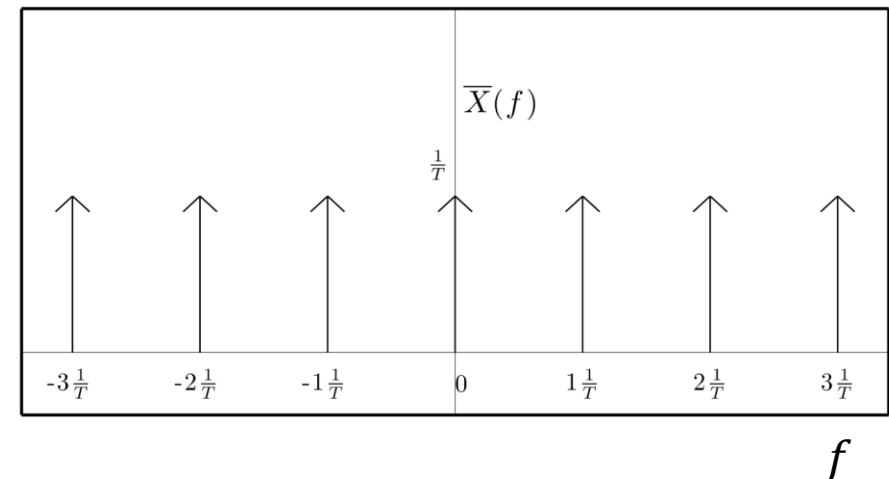
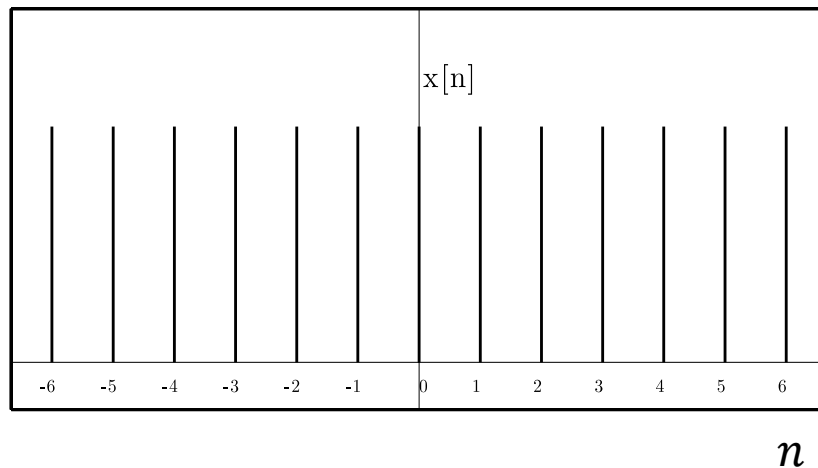
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Esempi di TF di sequenze

Quindi la trasformata di Fourier della sequenza costante è un pettine di Delta e nel periodo centrale è una delta in $f = 0$. Questo risultato è analogo alla TCF di una costante.

Di conseguenza, semplificando, la TF di una sequenza può essere vista come la periodicizzazione della TCF corrispondente

$$x[n] = 1 \xleftrightarrow{F} \bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$



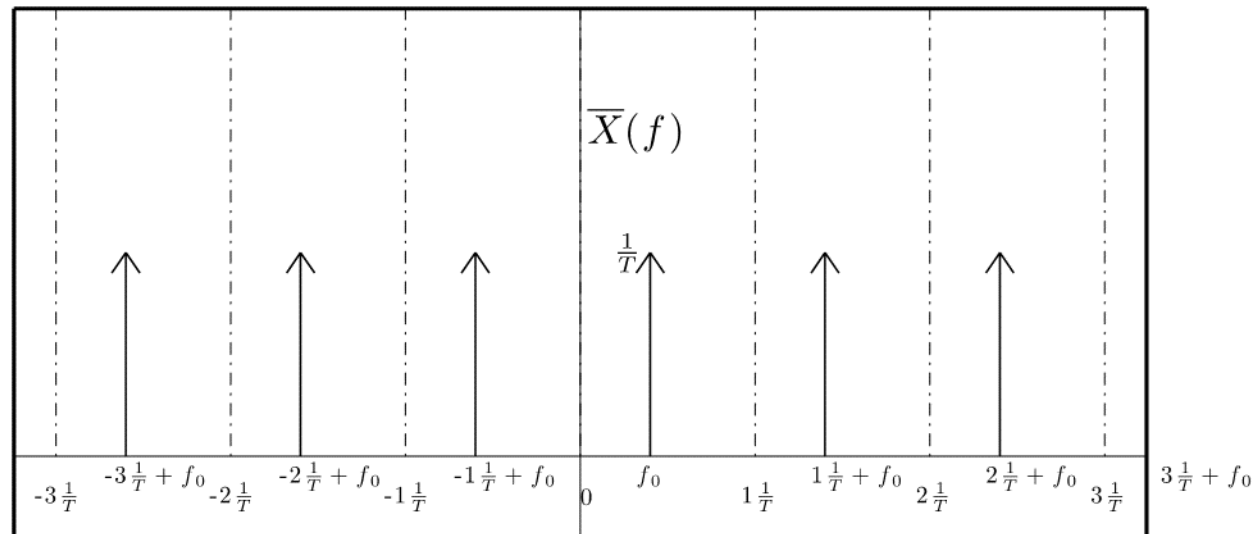
Esempi di TF di sequenze

Segnale Esponenziale complesso discreto

$$x[n] = e^{j2\pi f_0 n} \quad \bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_0 T} e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n (f - f_0) T}$$

Ripercorrendo l'approccio usato per la sequenza costante e sostituendo a $f \rightarrow f - f_0$

$$\bar{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n (f - f_0) T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - f_0 - \frac{k}{T}\right)$$

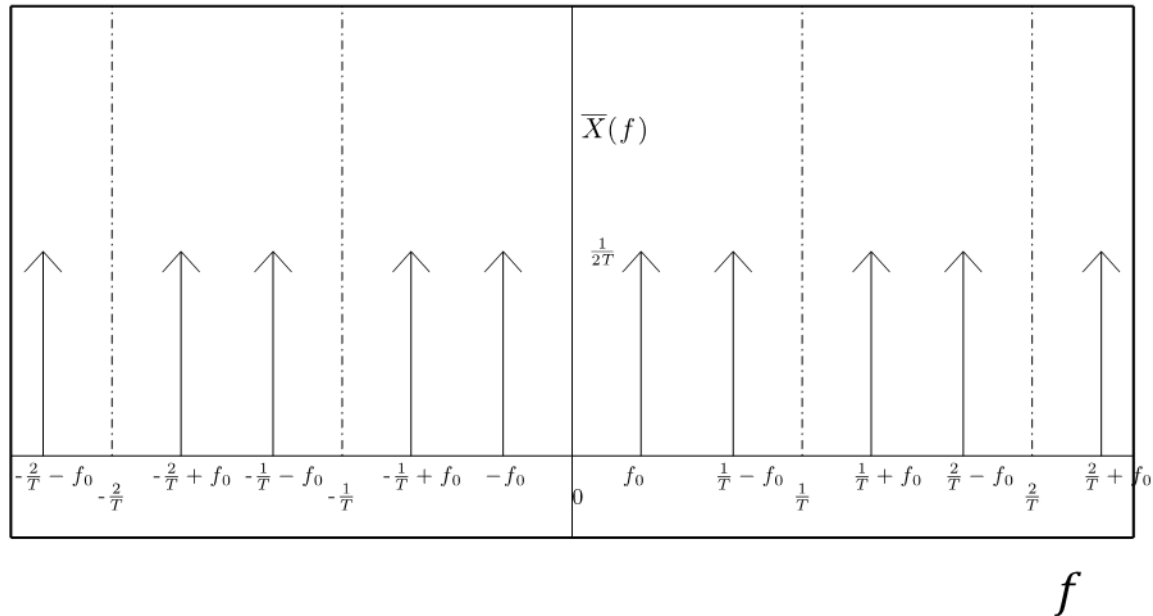


Esempi di TF di sequenze

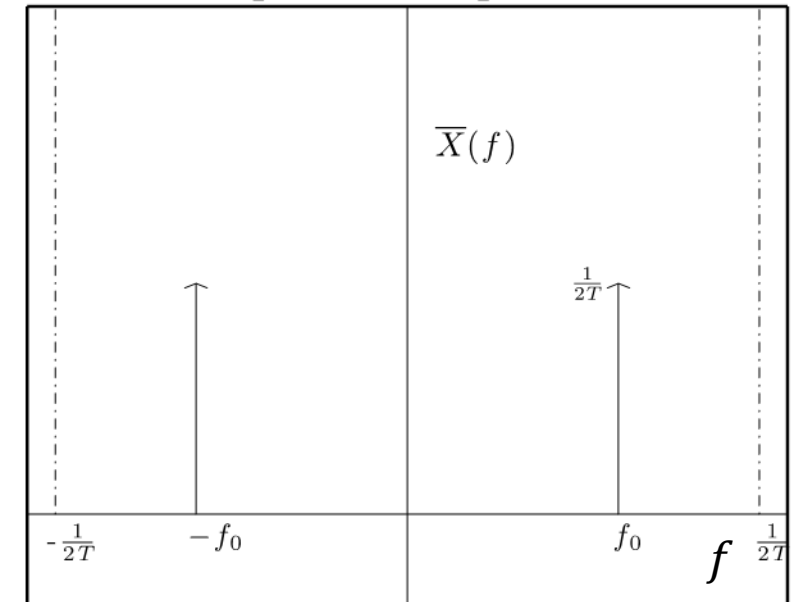
Segnale Cosinusoidale a Tempo Discreto $x[n] = \cos(2\pi f_0 nT)$

$$\begin{aligned}\bar{X}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-j2\pi n f_0 T} - e^{j2\pi n f_0 T}}{2} \right) e^{-j2\pi n f T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j2\pi n (f+f_0)T} - e^{-j2\pi n (f-f_0)T}}{2} \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(f + f_0 - \frac{k}{T}\right) + \delta\left(f - f_0 - \frac{k}{T}\right) \right]\end{aligned}$$

Dove sono state applicate le formule di Eulero e sfruttato il risultato precedentemente usato per la sequenza costante e sostituendo a $f \rightarrow f - f_0$



Nel periodo $[-f_c/2, f_c/2] = [-1/2T, 1/2T]$



TF di sequenze troncate

Nella pratica si usano sequenze di durata finita: esse possono essere viste come l'osservazione limitata temporalmente di una sequenza infinita $x[n]$.

Questa operazione prende il nome di operazione di troncamento e matematicamente può essere descritta come il prodotto della sequenza $x[n]$ per una finestra di osservazione $w[n]$, nulla per gli n esterni all'intervallo di osservazione.

Per vedere come sono legate le trasformate di $x[n]$ e della sua versione troncata $w[n]x[n]$ si deve ricorrere alla proprietà del prodotto nel tempo della TF, per cui

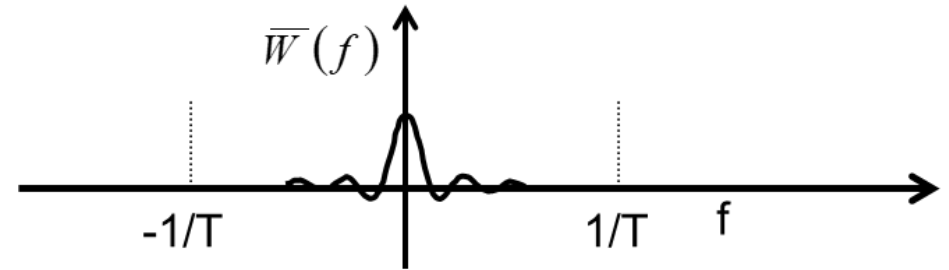
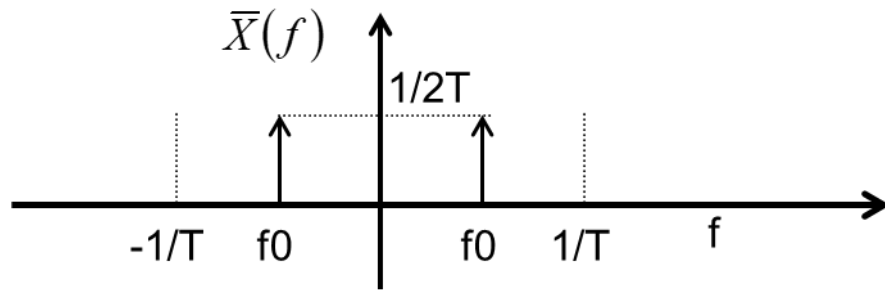
$$\begin{aligned}x[n] &\stackrel{TF}{\Leftrightarrow} \bar{X}(f) \\w[n] &\stackrel{TF}{\Leftrightarrow} \bar{W}(f)\end{aligned}$$

$$w[n]x[n] \stackrel{TF}{\Leftrightarrow} \int_{-1/2T}^{1/2T} \bar{W}(\alpha) \bar{X}(f - \alpha) d\alpha$$

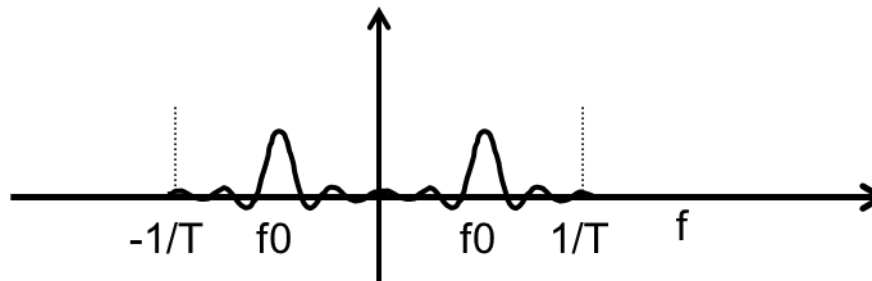
TF di sequenze troncate

Consideriamo ad esempio la TF di $x[n] = \cos(2\pi f_0 nT)$

Si trova che questa, nel periodo base, è data da due delta di Dirac centrate in $-f_0$ e f_0



Supponendo che la finestra sia semplicemente una finestra rettangolare, quindi una `rect()`, la sua TF risulterà simile ad una `sinc()`, il risultato della convoluzione tra le TF della serie e della finestra è il seguente:



Visto che il contenuto frequenziale delle `sinc()` diminuisce all'aumentare di T e si concentra attorno allo zero, la stima migliore della TF della sequenza di partenza si ottiene utilizzando una finestra di osservazione maggiore

Trasformata Discreta di Fourier (TDF)



In seguito considereremo la trasformata di Fourier di una sequenza finita.

Questa sarà ottenuta come Trasformata Discreta di Fourier (TDF) della periodizzazione della sequenza originaria.

Questo ci permetterà di descriverne il contenuto frequenziale tramite un numero finito e discreto di coefficienti, quindi di poter sfruttare la TF nel mondo digitale e di applicare la TF a segnali digitali. .

Time Duration		
Finite	Infinite	
Discrete FT (DFT) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega_k n}$ $k = 0, 1, \dots, N-1$	Discrete Time FT (DTFT) $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ $\omega \in [-\pi, +\pi)$	discr. time n
Fourier Series (FS) $X(k) = \frac{1}{P} \int_0^P x(t)e^{-j\omega_k t} dt$ $k = -\infty, \dots, +\infty$	Fourier Transform (FT) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ $\omega \in (-\infty, +\infty)$	cont. time t
discrete freq. k	continuous freq. ω	

Trasformata Discreta di Fourier (TDF)

Consideriamo una sequenza infinita e periodica di periodo N_0 tale per cui

$$\tilde{x}[nT] = \tilde{x}[(n + N_0)T]$$

Per rappresentare tale sequenza si possono utilizzare N_0 funzioni complesse del tipo $e_k[n] = e^{\frac{j2\pi kn}{N_0}}$

Queste sono funzioni oscillanti, periodiche di periodo N_0/k

Scrivendo in modo diverso la funzione oscillante, si individua la frequenza di oscillazione f_k

$$e_k[n] = e^{\frac{j2\pi knT}{N_0T}}$$

$$f_k = \frac{k}{N_0T}$$

Le frequenze sono multiple della frequenza fondamentale $1/(N_0T)$

Tali frequenze vengono dette “armoniche”

Inoltre, è possibile ricorrere a delle frequenze normalizzate rispetto al tempo di campionamento $F_k = f_kT = \frac{k}{N}$

e a delle associate pulsazioni normalizzate $\omega_k = 2\pi f_kT = \frac{2\pi k}{N}$

Vista la periodicità delle funzioni oscillanti è sufficiente utilizzarne solo N , con $k = 0, 1, \dots, N - 1$

Le componenti all'esterno di questo intervallo sono infatti indistinguibili da quelle all'interno

Trasformata Discreta di Fourier

Questo risultato è analogo a quanto visto per la Trasformata di Fourier di una sequenza: anche in quel caso la Trasformata è periodica e la sequenza è univocamente determinata dalle componenti all'interno di un periodo in frequenza

Infatti si può nuovamente verificare la periodicità delle componenti frequenziali:

$$e_{k+N_0}[n] = e^{\frac{j2\pi(k+N_0)nT}{N_0T}} = e^{\frac{j2\pi knT}{N_0T}} e^{\frac{j2\pi N_0 nT}{N_0T}} = e^{\frac{j2\pi knT}{N_0T}} e^{j2\pi n} = e^{\frac{j2\pi knT}{N_0T}}$$

$$e^{j2\pi n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

TDF ovvero Serie discreta di Fourier

La Trasformata Discreta di Fourier (TDF) di una sequenza periodica, anche detta Serie Discreta di Fourier (SDF), si esprime con la seguente sommatoria

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} \tilde{X}(k) e^{-\frac{j2\pi kn}{N_0}}$$

Il fatto di avere un numero finito di funzioni deriva dal fatto che:

- in ogni periodo della sequenza è presente un numero finito di campioni
- le funzioni sono periodiche

Simmetricamente, i coefficienti della TDF della sequenza periodica sono dati da

$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_0-1} \tilde{x}[n] e^{\frac{j2\pi kn}{N_0}}$$

Per quanto riguarda la notazione, si indicheranno i coefficienti della TDF come $\tilde{X}(k)$ o \tilde{X}_k

TDF o SDF

I coefficienti della TDF sono periodici di periodo N_0 infatti

$$e^{j2\pi n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{X}(k + N_0) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} \tilde{x}[n] e^{-\frac{j2\pi(k+N_0)n}{N_0}} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \tilde{x}[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N_0}} e^{-j2\pi n} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \tilde{x}[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N_0}} = \tilde{X}(k)$$

La periodicità dei coefficienti della TDF implica che sono sufficienti N_0 campioni di $\tilde{X}(k)$ per avere tutte le informazioni sul contenuto frequenziale della sequenza: in particolare è possibile scegliere l'intervallo $[0, 1, \dots, N_0 - 1]$ oppure un intervallo centrato attorno allo zero.

N.B. Nel caso di N_0 pari, non è possibile avere un intervallo perfettamente simmetrico.

Trasformata Discreta di Fourier

Frequenze delle funzioni oscillanti

$$f_k = \left[0, \frac{1}{N_0 T}, \frac{2}{N_0 T}, \dots, \frac{N_0 - 1}{N_0 T} \right]$$

Intervallo “centrato” attorno allo zero

N_0 dispari:

$$f_k = \left[-\frac{(N_0 - 1)/2}{N_0 T}, \dots, 0, \dots, \frac{(N_0 - 1)/2}{N_0 T} \right]$$

N_0 pari:

$$f_k = \left[-\frac{N_0/2}{N_0 T}, \dots, 0, \dots, \frac{N_0/2 - 1}{N_0 T} \right]$$

Frequenze delle funzioni normalizzate

$$F_k = f_k T = \left[0, \frac{1}{N_0}, \frac{2}{N_0}, \dots, \frac{N_0 - 1}{N_0} \right]$$

Intervallo “centrato” attorno allo zero

N_0 dispari:

$$F_k = \left[-\frac{(N_0 - 1)/2}{N_0}, \dots, 0, \dots, \frac{(N_0 - 1)/2}{N_0} \right]$$

N_0 pari:

$$F_k = \left[-\frac{N_0/2}{N_0}, \dots, 0, \dots, \frac{N_0/2 - 1}{N_0} \right]$$

Esempi di TDF

Consideriamo la sequenza periodica $s[n] = 3 \sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right)$

La sequenza è periodica di periodo $N_0 = 8$

Potremmo utilizzare la formula $\tilde{S}(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} s[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N_0}}$

In questo semplice caso possiamo invece utilizzare la formula di Eulero e confrontare il risultato con l'equazione di sintesi:

$$s[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} \tilde{S}(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N_0}}$$

Svolgendo:

$$s[n] = 3 \sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right) = \frac{3}{2j} e^{j\frac{2\pi n}{8}} - \frac{3}{2j} e^{-j\frac{2\pi n}{8}} = \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{2\pi n}{8}} + \frac{3}{2} e^{j\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi n}{8}} = \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{2\pi n}{8}} + \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi n}{8}}$$

Esempi di TDF

Confrontiamo con l'equazione di sintesi, che espandiamo per semplificare tale operazione di confronto

$$s[n] = \tilde{S}(0) + \tilde{S}(1)e^{j\frac{2\pi n}{8}} + \tilde{S}(2)e^{j\frac{4\pi n}{8}} + \tilde{S}(3)e^{j\frac{6\pi n}{8}} + \tilde{S}(4)e^{j\frac{4\pi n}{8}} + \tilde{S}(5)e^{j\frac{10\pi n}{8}} + \tilde{S}(6)e^{j\frac{12\pi n}{8}} + \tilde{S}(7)e^{j\frac{14\pi n}{8}}$$

Ricordando che usando la formula di Eulero si era ottenuto $s[n] = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{2\pi n}{8}} + \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{2\pi n}{8}}$

Dal confronto si evince che $\tilde{S}(1) = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

N.B. L'equazione di sintesi fa uso dei coefficienti tra 0 e $N_0 - 1$, mentre la formula di Eulero presenta un termine per $k = -1$

$$e^{j\frac{14\pi n}{8}} = e^{-j\frac{2\pi n}{8}}$$

Infatti, data la periodicità dei coefficienti possiamo scrivere $\tilde{S}(-1) = \tilde{S}(-1 + N_0) = \tilde{S}(-1 + 8) = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$

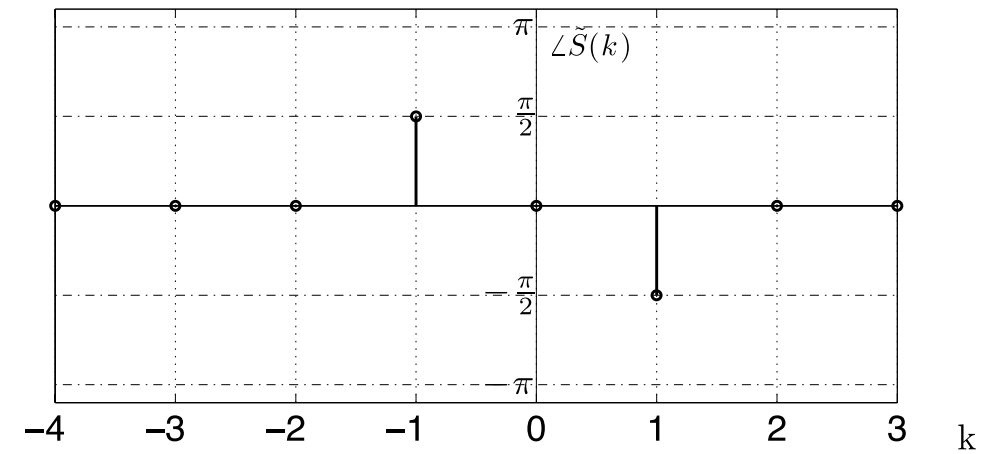
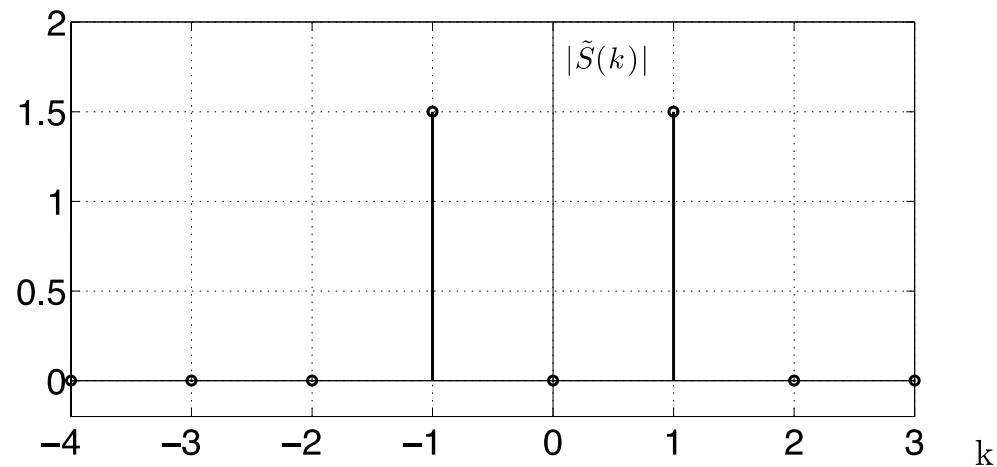
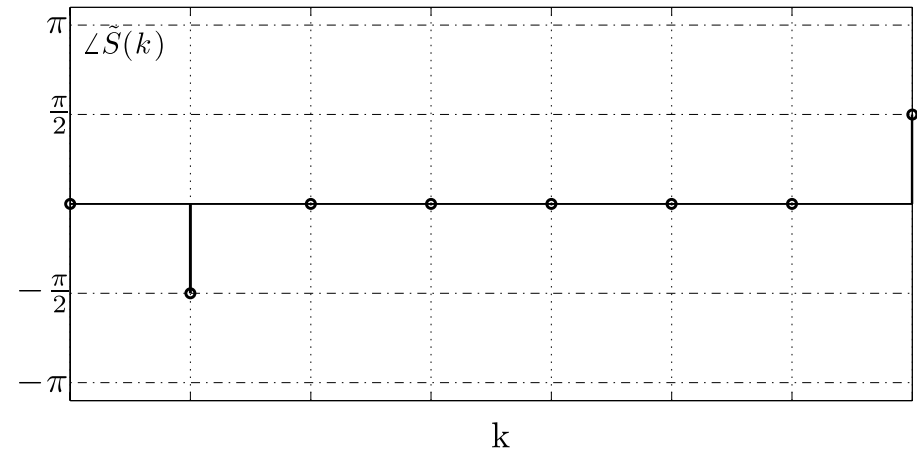
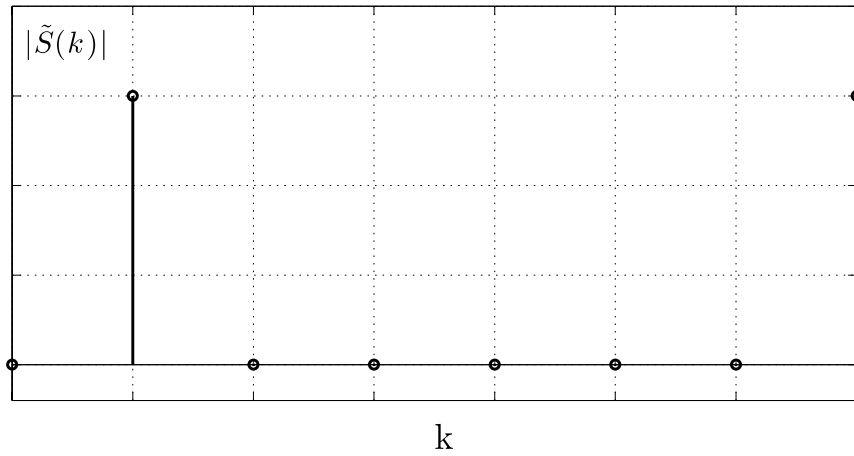
Possiamo quindi scegliere una delle seguenti rappresentazioni

$$\tilde{S}(-1) = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}; \tilde{S}(1) = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \text{oppure} \quad \tilde{S}(1) = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}; \tilde{S}(7) = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

A seconda che si scelga un intervallo frequenziale simmetrico o asimmetrico rispetto a $f = 0$

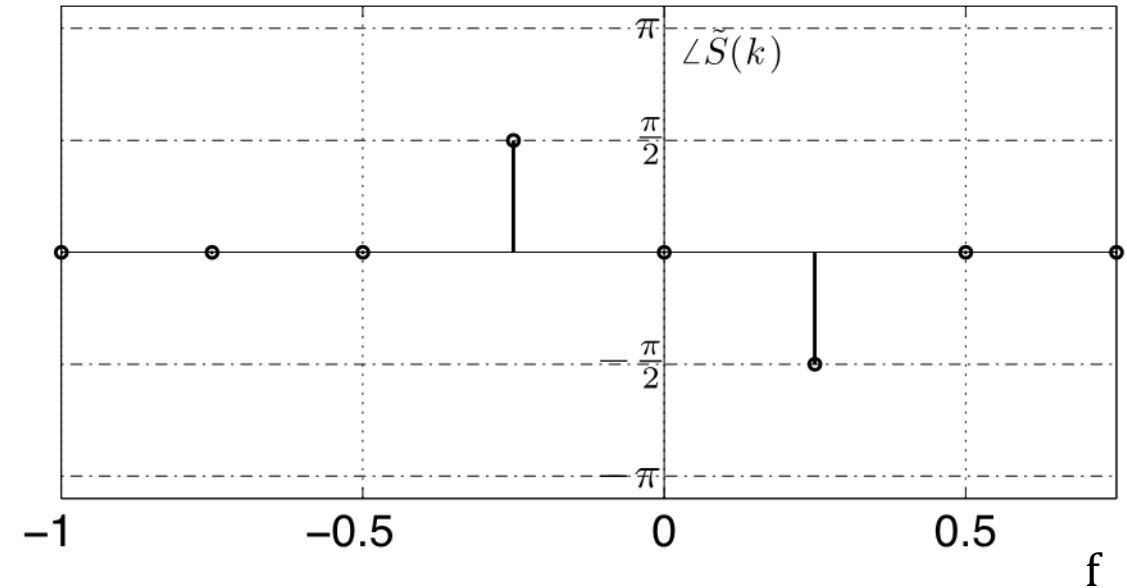
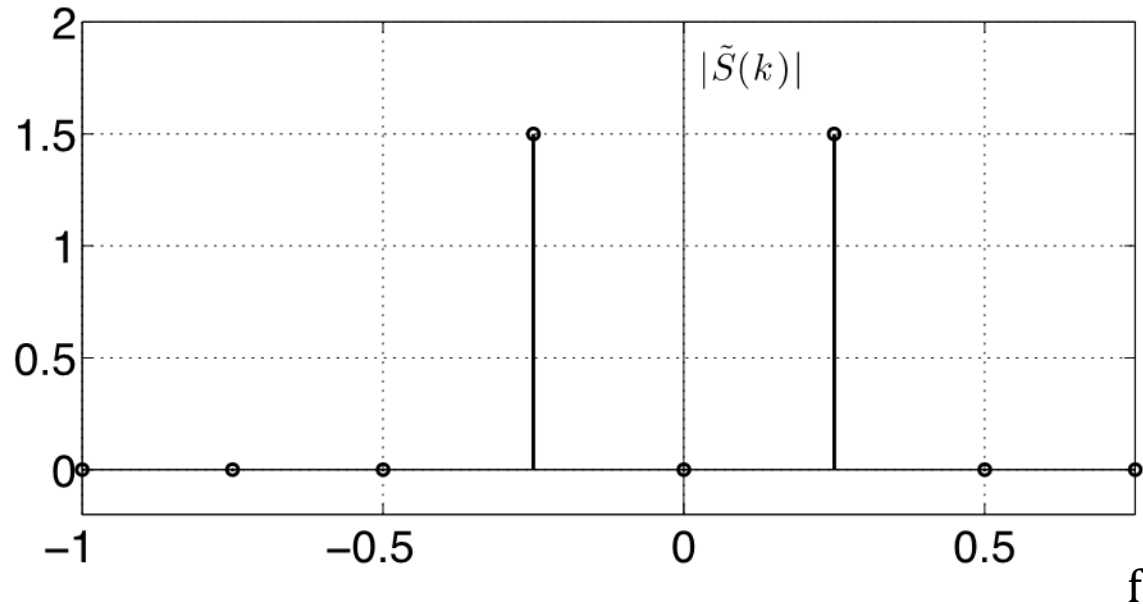
Esempi di TDF

Di seguito le due rappresentazioni dei coefficienti della TDF



Esempi di TDF

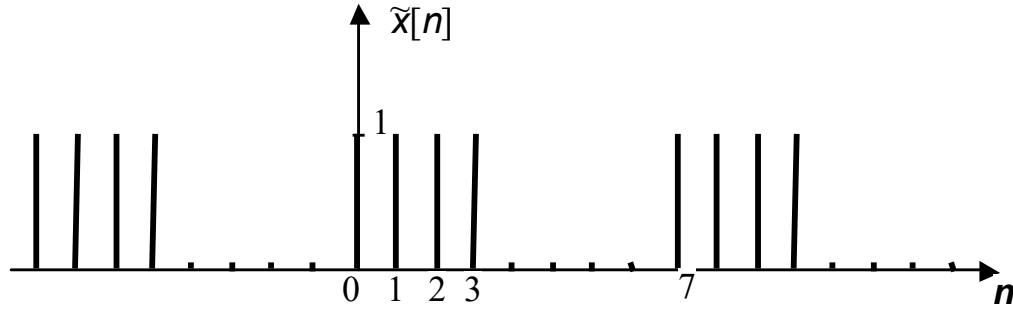
Le rappresentazioni precedenti sono in funzione di k , mentre nel caso venisse specificato un tempo tra i campioni, ad esempio $T = 0.5s$, i grafici potrebbero essere effettuati in funzione della frequenza f



Perché f è nell'intervallo $[-1, 0.75]$?

Esempi di TDF

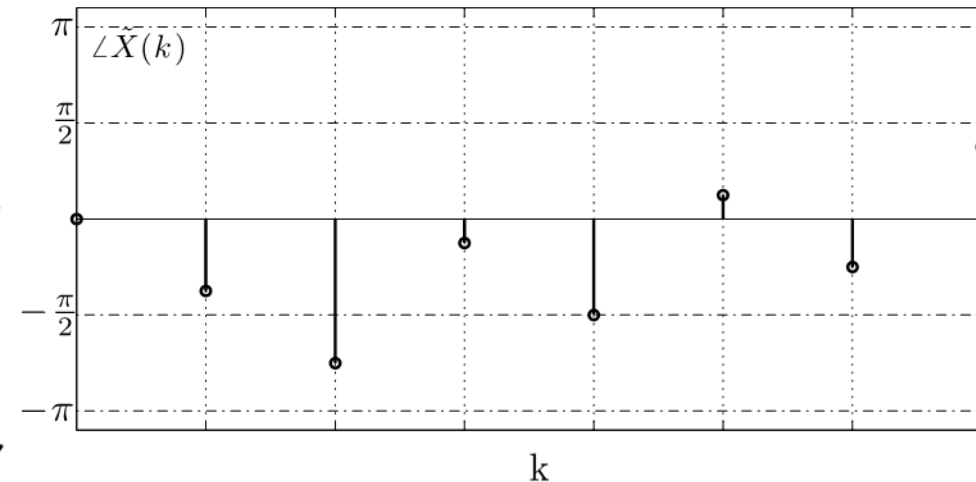
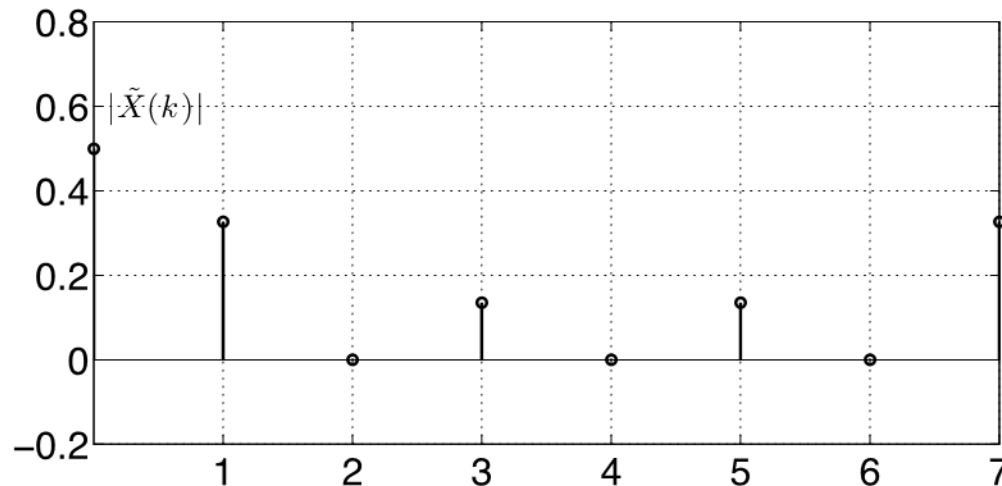
Vediamo la TDF di un'onda quadra ottenuta periodicizzando la sequenza $x[n] = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$



$$\tilde{X}(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N_0}} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^3 e^{-\frac{j2\pi kn}{8}} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^3 \left(e^{-\frac{j2\pi k}{8}} \right)^n$$

$$\tilde{X}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{8} \frac{1 - e^{-jk\pi}}{1 - e^{-jk\pi/4}}, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{8} \frac{e^{-jk\pi/2} e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2}}{e^{-jk\pi/8} e^{jk\pi/8} - e^{-jk\pi/8}}, & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{1}{8} e^{-\frac{j3k\pi}{8}} \frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/8)}, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n \begin{cases} N, & a = 1 \\ \frac{1 - a^N}{1 - a}, & a \neq 1 \end{cases}$$



TDF di una sequenza finita

Il caso della TDF di una sequenza finita viene ricavato a partire dalla TDF della sequenza periodica ottenuta periodicizzando la sequenza finita stessa.

Vedremo che la TDF di una sequenza finita, passando attraverso la sua periodicizzazione, permette di ottenere i valori della TF della sequenza per un insieme finito di valori di f .

Detta $x[n]$ la sequenza finita di lunghezza N , consideriamo la sequenza ottenuta dalla sua periodicizzazione, con periodo N :

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

Per cui vale la seguente relazione:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Dall'ultima relazione si vede che è possibile ricavare la sequenza finita da quella periodica: ne consegue che, a partire dai coefficienti della TDF della sequenza periodica, è possibile ricavare i valori della sequenza finita.

Per analogia al legame esistente nel dominio temporale tra le due sequenze, si definisce il legame tra i coefficienti delle due trasformate: si è visto che i coefficienti della trasformata discreta di Fourier di una sequenza periodica, formano a loro volta una sequenza periodica in k . I coefficienti della TDF della sequenza finita si ottengono da questi ultimi secondo la seguente relazione

$$X(k) = \begin{cases} \tilde{X}(k), & 0 \leq k \leq N - 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Con

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(k - nN)$$

TDF di una sequenza finita

La TDF di una sequenza finita si ottiene quindi come

$$X(k) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N_0}} \quad 0 \leq k \leq N_0 - 1$$

L'operazione inversa si esprime come

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} X(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N_0}} \quad 0 \leq n \leq N_0 - 1$$

La relazione intercorrente tra i coefficiente k –esimo della Trasformata Discreta di Fourier della sequenza periodicizzata $X(k)$ e la Trasformata di Fourier della sequenza originaria $\tilde{X}(k)$, può essere espressa con la relazione di campionamento in frequenza per cui

$$X(k) = \frac{1}{N_0} \tilde{X}\left(\frac{k}{N_0 T}\right)$$

dove N_0 è il numero di campioni della sequenza originaria.

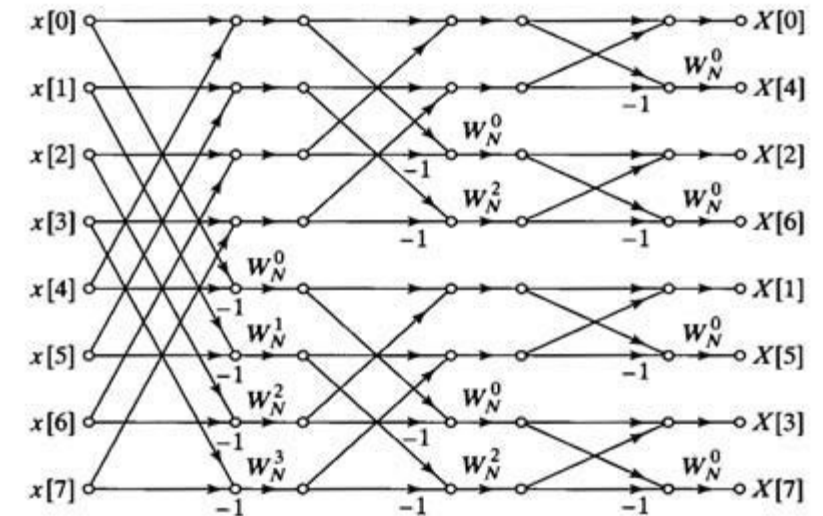
TDF: algoritmo FFT

La TDF di una sequenza finita può essere calcolata utilizzando algoritmi, computazionalmente efficienti, quali gli algoritmi Fast Fourier Transform (FFT).

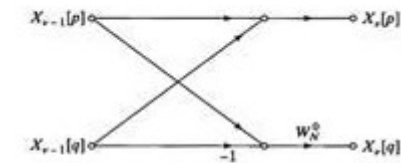
L'efficienza degli algoritmi FFT consiste nel numero di operazioni necessarie per calcolare la TDF di una sequenza finita di N campioni, infatti:

- il calcolo della TDF, a partire dalla definizione, implica l'utilizzo di $8N^2 - 2N$ operazioni
- tramite algoritmi FFT si arriva a $8\log_2(N) + 6N$ operazioni

Tale velocità di calcolo giustifica l'utilizzo di algoritmi FFT per il calcolo della convoluzione tra due sequenze.



(a)



(b)

TDF tramite FFT in ambiente Matlab

Vedremo un esempio relativo al calcolo della TDF di alcune sequenze finite.

La funzione che calcola la TDF di una sequenza finita in MATLAB prende il nome di *fft()*

Se la sequenza finita viene memorizzata in un vettore x di N elementi, il comando $X = \text{fft}(x)$ fornisce nel vettore X di N elementi, i coefficienti della TDF, previa divisione per il numero di campioni N

.....
] L'algoritmo dal punto di vista computazionale è
] particolarmente efficiente se N è uguale ad una potenza di 2
]

Quando eseguiamo il comando $X = \text{fft}(x)$ con x il vettore contenente la sequenza di ingresso

la prima posizione del vettore di uscita X contiene il coefficiente $N_0 X[0]$, che rappresenta la componente continua della trasformata discreta di Fourier, moltiplicata per N_0 alla posizione k il vettore contiene il coefficiente $N_0 X[k - 1]$

Ovvero otteniamo il valore della TDF, moltiplicata per N_0 e in uno specifico intervallo di frequenze

$$f_k = \left[0, \frac{1}{N_0 T}, \frac{2}{N_0 T}, \dots, \frac{N_0 - 1}{N_0 T} \right]$$

TDF tramite FFT in ambiente Matlab

Per ottenere il valore della TDF corretto dovremmo dividere per N_0

$$X = \text{fft}(x) / N_0$$

Volendo che il vettore X sia centrato rispetto all'origine $f = 0$, indipendentemente dal fatto che N_0 sia pari o dispari, si può utilizzare la funzione `fftshift()`

si noti che `fftshift()` riordina solamente gli elementi di X , quindi quelli della trasformata

Per esempio:

```
>> a=[0:7]; fftshift(a)
```

```
ans =
```

```
4 5 6 7 0 1 2 3
```

```
>> a=[0:8]; fftshift(a)
```

```
ans =
```

```
5 6 7 8 0 1 2 3 4
```

TDF tramite FFT in ambiente Matlab

ESERCIZIO DI ESEMPIO

Si consideri la sequenza ottenuta campionando con $T_c = 0.5s$ il segnale tempo continuo $s(t) = \cos(2\pi t/8)$. Calcolare la TDF utilizzando il comando `fft()`

Per prima cosa si verifica che il tempo di campionamento sia corretto: $T_c = 0.5s \rightarrow f_c = 2Hz$ essendo il coseno un'oscillazione a frequenza $f_1 = 1/8 = 0.25$ (quindi il periodo della cosinusoide è $T_1 = 8s$) la condizione di Nyquist è largamente soddisfatta

Inoltre il periodo del segnale e tempo di campionamento sono in rapporto razionale per cui la sequenza ottenuta dal campionamento è periodica

Per trovarne il periodo si possono individuare gli interi p e q più piccoli tali che

$$pT_1 = qT_c \rightarrow p * 8 = q * 0.5 \rightarrow p = 1, q = 16$$

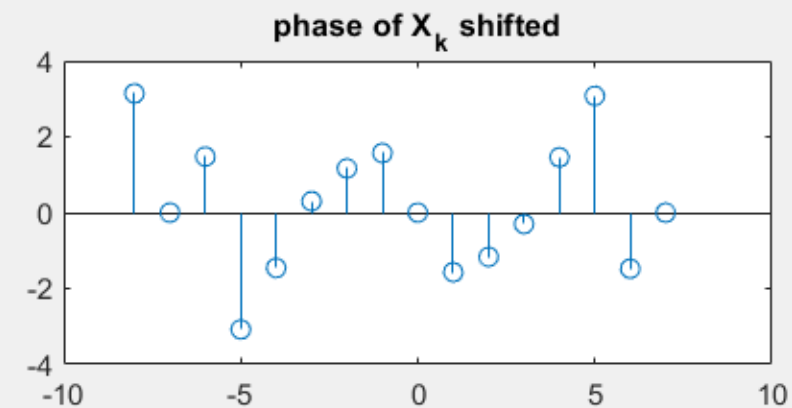
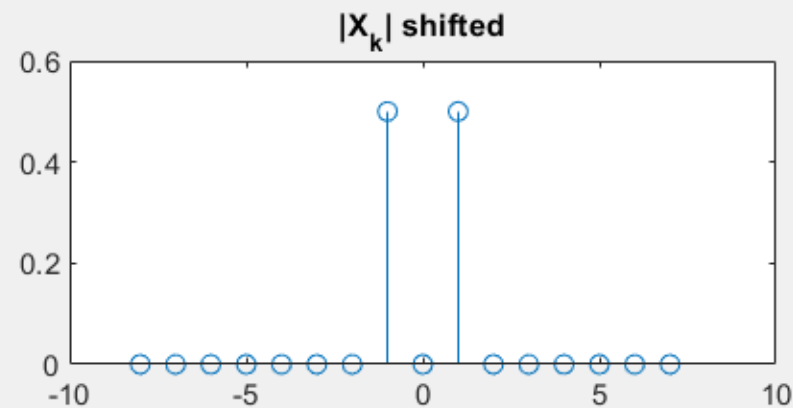
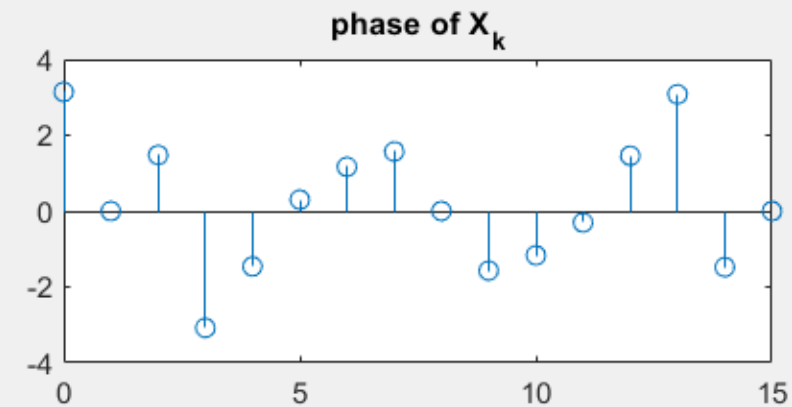
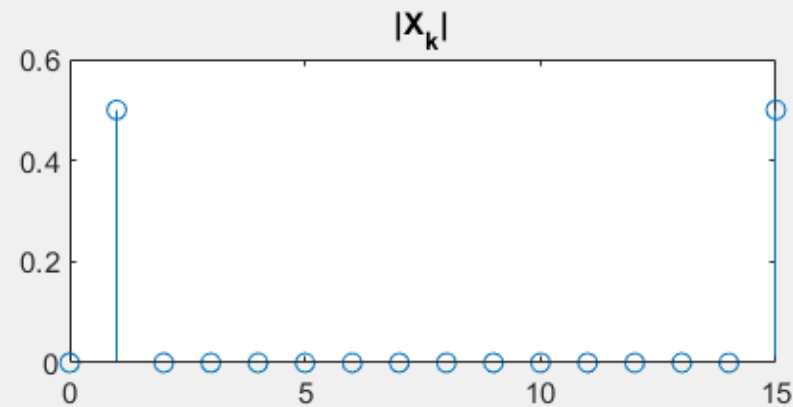
Quindi il periodo della sequenza è $pT_1 = qT_c = 8s = T_1$, ovvero 8 secondi (16 campioni), come il periodo della cosinusoide di partenza

$$s[n] = \cos(2\pi n T_c / 8) = \cos(2\pi n / 8 f_c) = \cos(2\pi n / 16)$$

TDF tramite FFT in ambiente Matlab

```
n = 0:15;  
x = cos(2*pi*n/16);  
X = fft(x)/16;  
k = 0:15;  
X_shift = fftshift(X);  
k_shift = -8:7;
```

```
figure;  
subplot(2,2,1); stem(k,abs(X)); title('|X_k|');  
subplot(2,2,2); stem(k,angle(X)); title('phase of X_k');  
subplot(2,2,3); stem(k_shift,abs(X_shift)); title('|X_k| shifted');  
subplot(2,2,4); stem(k_shift,angle(X)); title('phase of X_k shifted');
```



TDF tramite FFT in Matlab: analisi TF sequenza

Ricordando la relazione di campionamento in frequenza.

$$X(k) = \frac{1}{N_0} \tilde{X}\left(\frac{k}{N_0 T}\right)$$

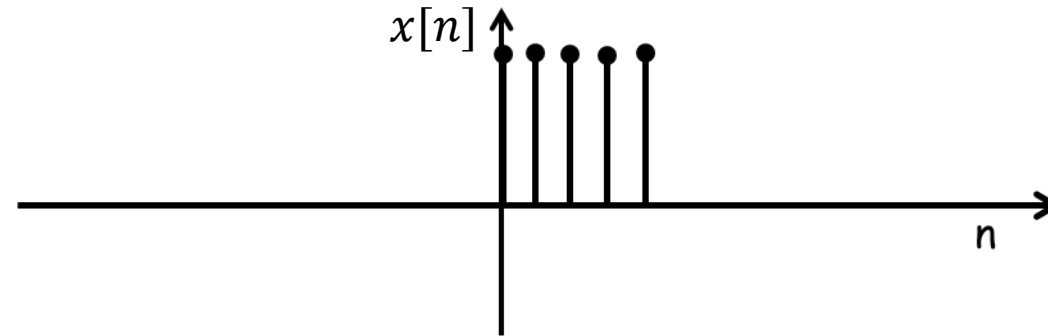
Si evince che è possibile utilizzare la *fft* per stimare la Trasformata di Fourier $\tilde{X}(f)$ della sequenza aperiodica $x[n]$:

$$\tilde{X}\left(\frac{k}{N_0 T}\right) = N_0 X(k)$$

Tramite la *fft* si possono calcolare gli $X(k)$ e da questi i valori della $\tilde{X}(f)$

TDF tramite FFT in Matlab: analisi TF sequenza

Come esempio consideriamo la Trasformata di Fourier di un impulso rettangolare discreto (una finestra rettangolare) $x[n] = u[n] - u[n - 5]$

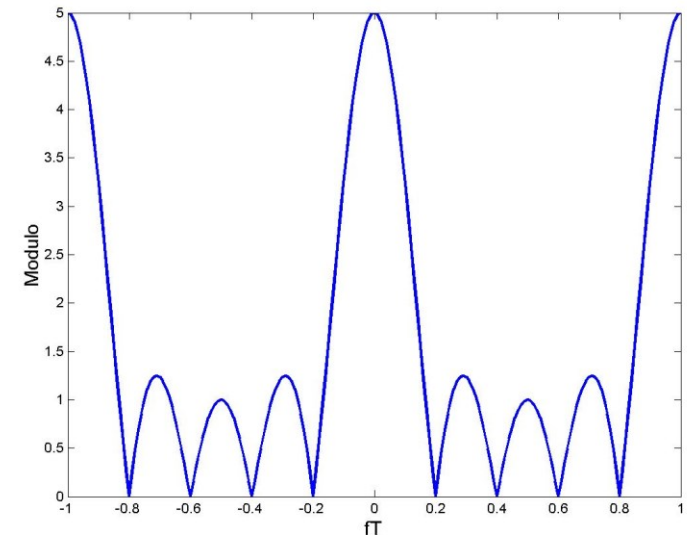


La Trasformata di Fourier vale

$$\tilde{X}(f) = \frac{\sin(5\pi fT)}{\sin(\pi fT)} e^{-j4\pi fT}$$

Per poter calcolare la $\tilde{X}(f)$ attraverso la *fft* bisogna ragionare sulla numerosità campionaria e sulla risoluzione temporale e frequenziale

E il modulo della TF ha questo andamento:



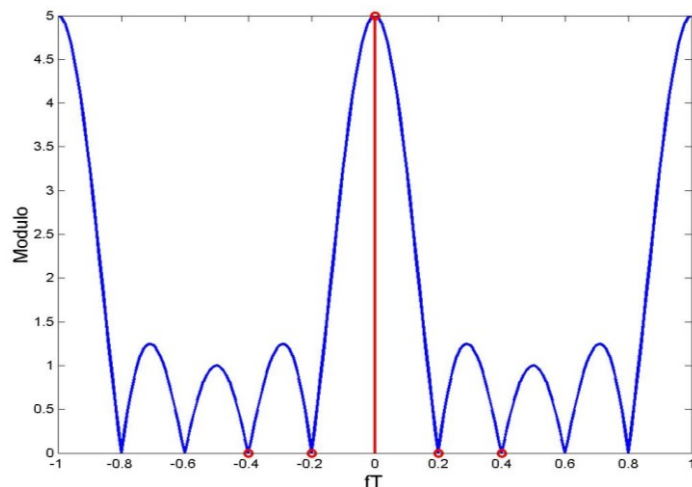
Zero padding

Si consideri un vettore contenente gli elementi non nulli della sequenza di partenza: quindi di 5 elementi

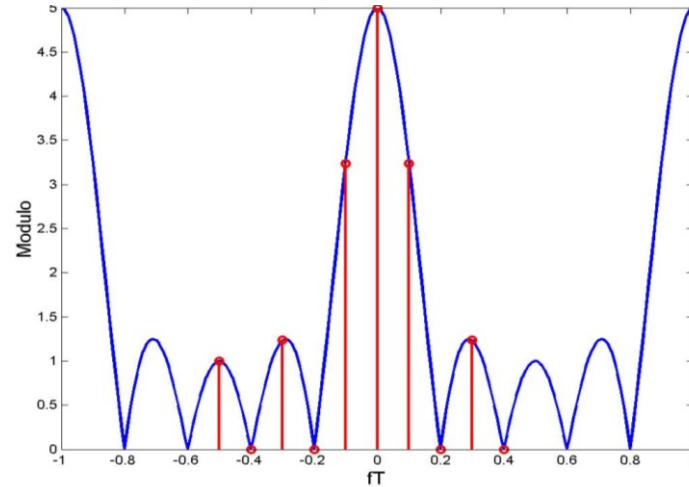
$$x[n] = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Si esegue la $fft()$ sul vettore periodicizzato, rispettivamente con $N = 5$, con $N = 10$ e $N = 20$. Nel caso di $N = 10$ e $N = 20$, è necessario aggiungere in coda al vettore di partenza rispettivamente 5 e 15 zeri. Questo può essere ottenuto sia nella definizione di , ma anche, più generalmente su tutti i vettori, come secondo input alla funzione: $X = fft(x, N)$

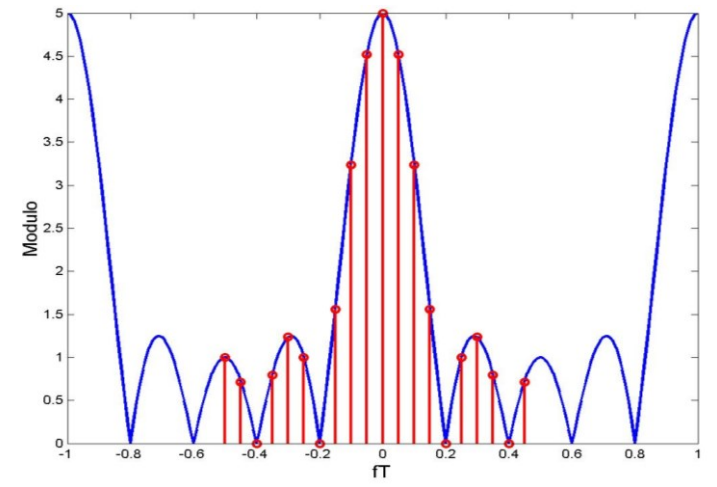
Il grafico del modulo del risultato della fft è sovrapposto a quello della Trasformata di Fourier della sequenza. Si noti che se non effettuiamo la normalizzazione per N l'algoritmo fft , nella versione di Matlab, fornisce già il valore $N_0 X(k)$



$N = 5$



$N = 10$



$N = 20$

Effetto del troncamento

Consideriamo una sequenza infinita $\tilde{x}[n]$ e osserviamola per un numero N di campioni, ad esempio per n che va da 0 a $N - 1$, ottenendo una sequenza $x[n]$

La sequenza osservata è legata a $\tilde{x}[n]$ dalla seguente relazione nel tempo

$$x[n] = \tilde{x}[n] * (u[n] - u[n - N])$$

Ciò comporta una variazione in frequenza, dato che la TF di $x[n]$ è legata a quella della sequenza originale tramite una convoluzione con una funzione simile ad una *sinc*

$$X(f) = \tilde{X}(f) \otimes U(f) = \tilde{X}(f) \otimes \frac{\sin(\pi f T N)}{\sin(\pi f T)} e^{-j\pi f T (N-1)}$$

Dove $\tilde{X}(f)$ è la TF di $\tilde{x}[n]$ e $U(f)$ è la TF della finestra rettangolare.

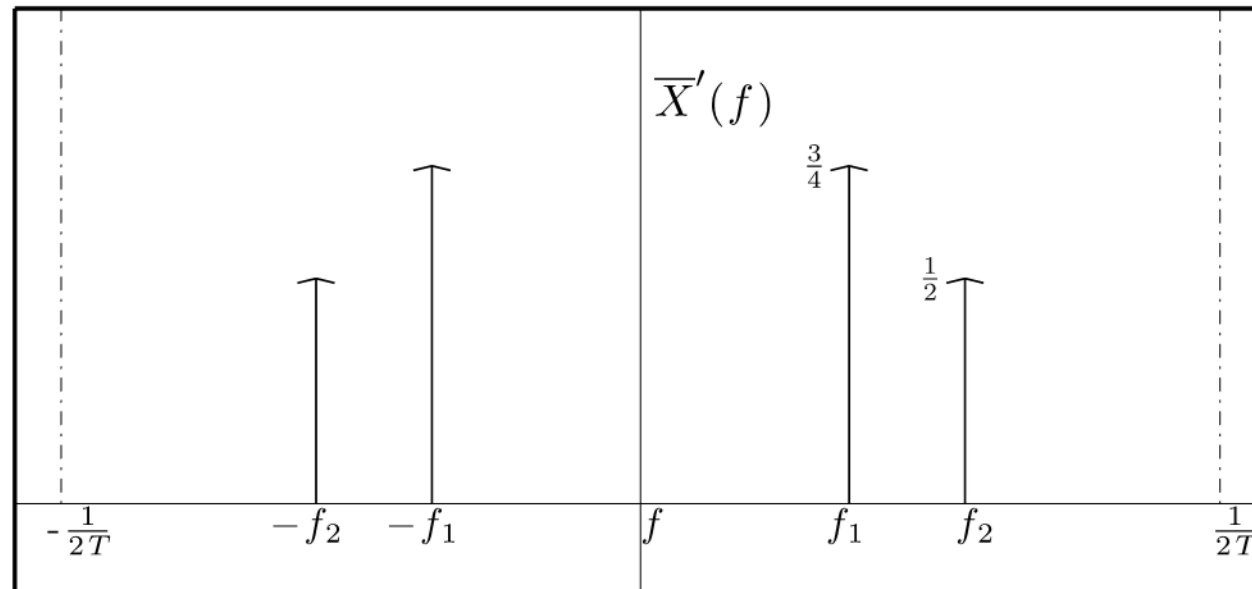
Volendo calcolare la TDF, si effettuerà un campionamento:

$$X(k) = \frac{1}{N_0} X\left(\frac{k}{N_0 T}\right) = \tilde{X}\left(\frac{k}{N_0 T}\right) \otimes \frac{\sin\left(\pi \frac{k}{N_0 T} T N\right)}{\sin\left(\pi \frac{k}{N_0 T} T\right)} e^{-j\pi \frac{k}{N_0 T} T (N-1)}$$

Effetto del troncamento

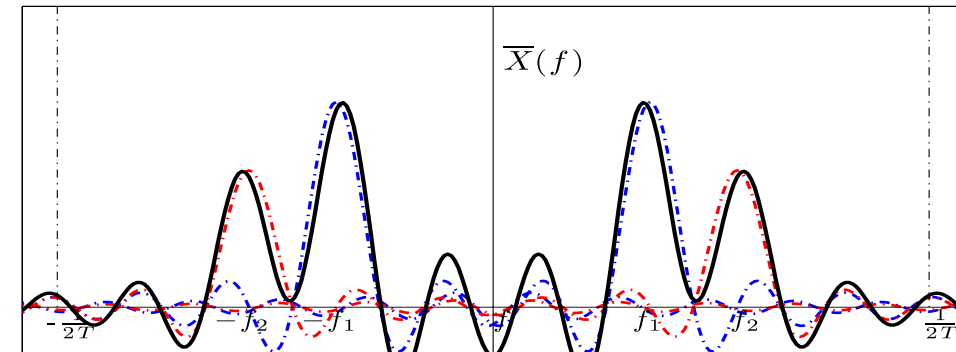
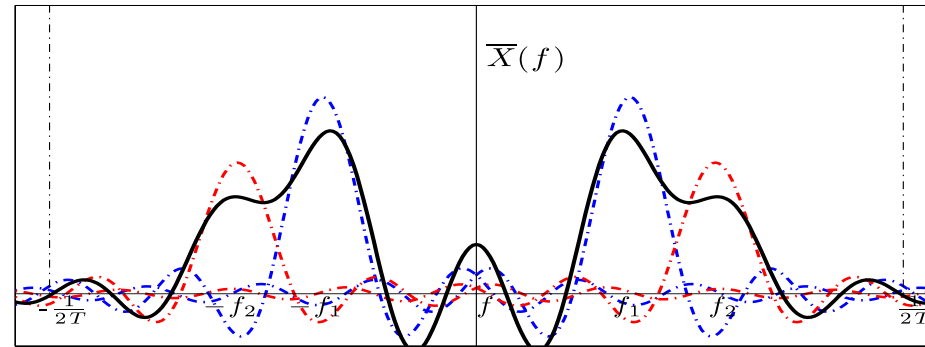
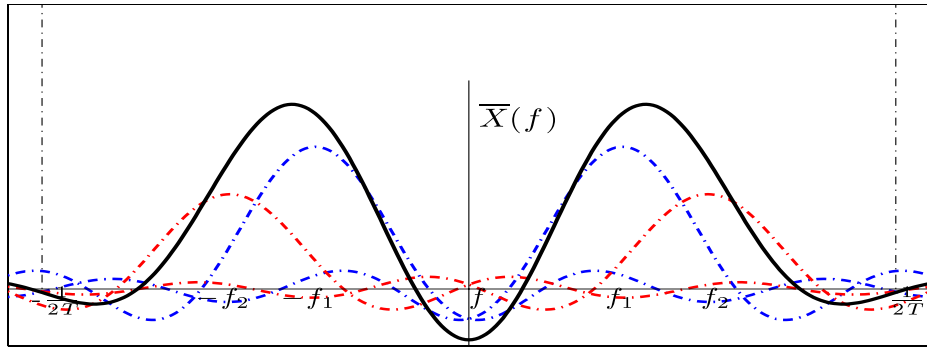
Vediamo un esempio di due funzioni cosinusoidali aventi frequenze rispettivamente f_1 e f_2

La TF della sequenza periodica è data dai 4 fasori che compongono le componenti



Effetto del troncamento

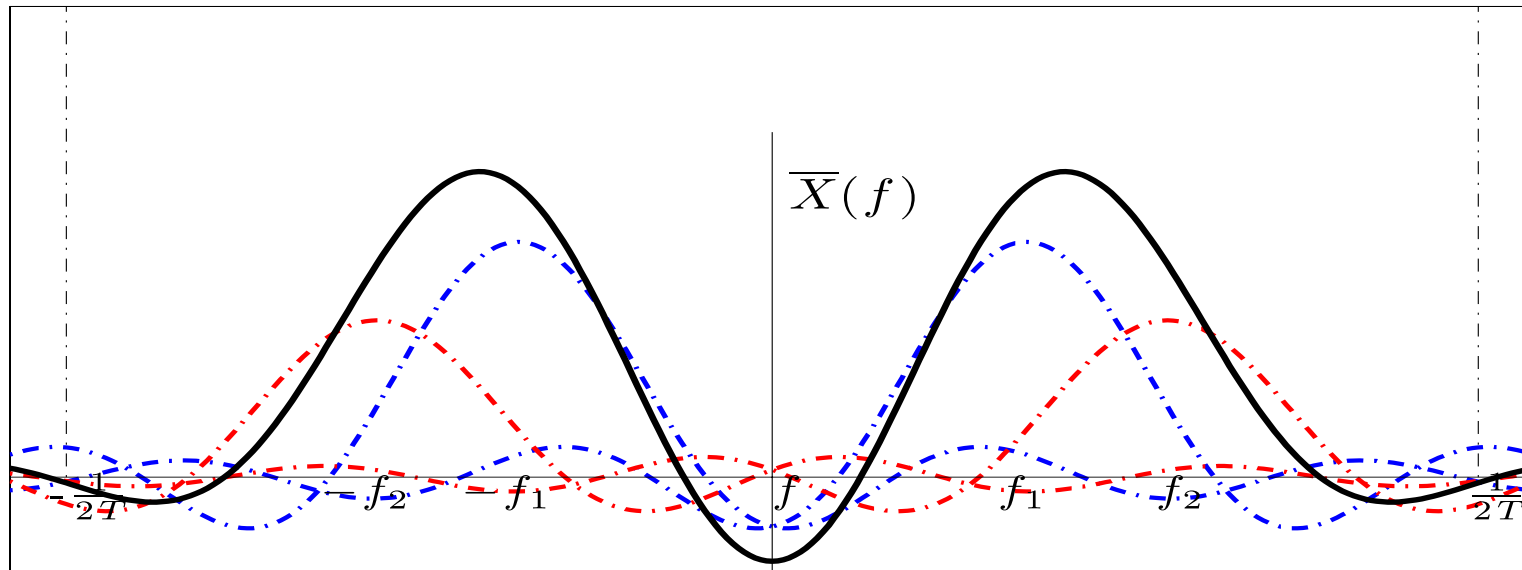
Si mostra cosa succede al variare dell'ampiezza temporale della finestra di osservazione alla TF, a partire da una finestra più piccola fino ad aumentarne la durata



Effetto del troncamento

Si noti come nel primo caso anche un aumento sensibile del numero di zeri, nell'operazione di zero padding, pur comportando un aumento del numero di campioni in frequenza, non permette di migliorare la risoluzione frequenziale, intesa non come distanza tra campioni in frequenza, ma come capacità di distinguere due componenti

Tale miglioramento si può ottenere solo aumentando la finestra di osservazione.



Esercitazione

Considerare una sequenza $x[n]$ data dalla somma di due cosinusoidi a frequenze $f_1 = 2Hz$ e $f_2 = 2.1Hz$, con ampiezze arbitrarie A_1 e A_2 , e campionate con una frequenza di campionamento $f_c = 10Hz$

Valutare gli effetti dello zero padding nei seguenti casi:

- Fissare il valore di zero padding ($N = 300$) e applicarlo alla trasformata della sequenza per tempi di osservazione di $T = [3, 5, 10, 15, 20, 30]sec$. Plottare tutto in una unica figura con 6 subplot, fare attenzione alla taratura degli assi e alle ampiezze delle trasformate ottenute
- Fissare il tempo di osservazione $T = 15sec$ e calcolare la trasformata usando un numero di campioni $N = [30, 50, 100, 150, 200, 300]$. Plottare tutto in una unica figura con 6 subplot, fare attenzione alla taratura degli assi e alle ampiezze delle trasformate ottenute

Esercitazione

Caricare il file SampleEEG, presente nella cartella Teams, già usato in una precedente esercitazione. Il file contiene un segnale EEG *SampleEEG* campionato con una frequenza di campionamento salvata nella variabile *sampling_rate* registrato su 9 canali, i cui nomi sono contenuti nella variabile *Chans_names*.

Per ogni canale trovare:

- La TDF calcolata sui primi 2 secondi del segnale;
- La TDF calcolata sull'intero segnale;
- La media tra le TDF calcolate su finestre non sovrapposte di 2 secondi ciascuna
- Prendere il risultato del punto precedente e normalizzare per il vettore delle frequenze $X'(f) = \left(\frac{X(f)}{f}\right)$

Per 3 canali a scelta fare un grafico (scegliere il modo più congeniale per farlo) in cui siano rappresentati i vettori calcolati, fare attenzione alla taratura degli assi.

Infine per gli $X'(f)$ di ogni canale fin qui derivati trovare a quale frequenza si ottiene il picco (il massimo) della $X'(f)$ corrispondente e salvarlo in una variabile f_{picco} .