Teoria dei Grafi

Elementi di base della Teoria dei Grafi

Definizione 1. *Un grafo $G = (V, E)$ è composto da un insieme finito di nodi (o vertici) V e da un insieme di archi $E \subset V \times V$ che connettono coppie di nodi. Due nodi connessi da un arco sono detti* **adiacenti**.

Dato $e \in E$, esistono v_i e $v_j \in V$ tali che $e = (v_i, v_j)$.

Esempio 1. *Si consideri $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e*
$E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$

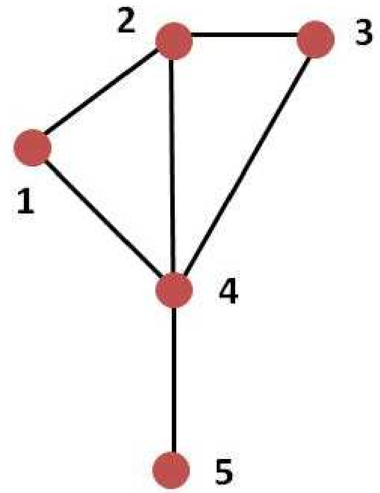


Figura 2: Esempio di grafo non orientato

Definizione 2. *L'insieme* $N_i = \{v_j | (v_i, v_j) \in E\} \subset V$ *è l'insieme dei nodi adiacenti al nodo* i.

Dall'esempio 1 si ha $N_1 = \{2, 4\}$, $N_2 = \{1, 3, 4\}$, $N_3 = \{2, 4\}$, $N_4 = \{1, 2, 3, 5\}$, $N_5 = \{4\}$.

Definizione 3. *Un* **cammino** *in* G *è una sequenza di nodi distinti tale che ogni nodo è adiacente al nodo precedente e/o successivo.*

Definizione 4. *Un cammino in cui il primo e l'ultimo nodo coincidono è detto* **ciclo**. *Un grafo senza cicli è una* **foresta**.

Definizione 5. *Un grafo* G *è* **connesso** *se per ogni coppia di vertici esiste un cammino che ha quei vertici come nodi iniziale e finale. Una foresta connessa è detto un* **albero**.

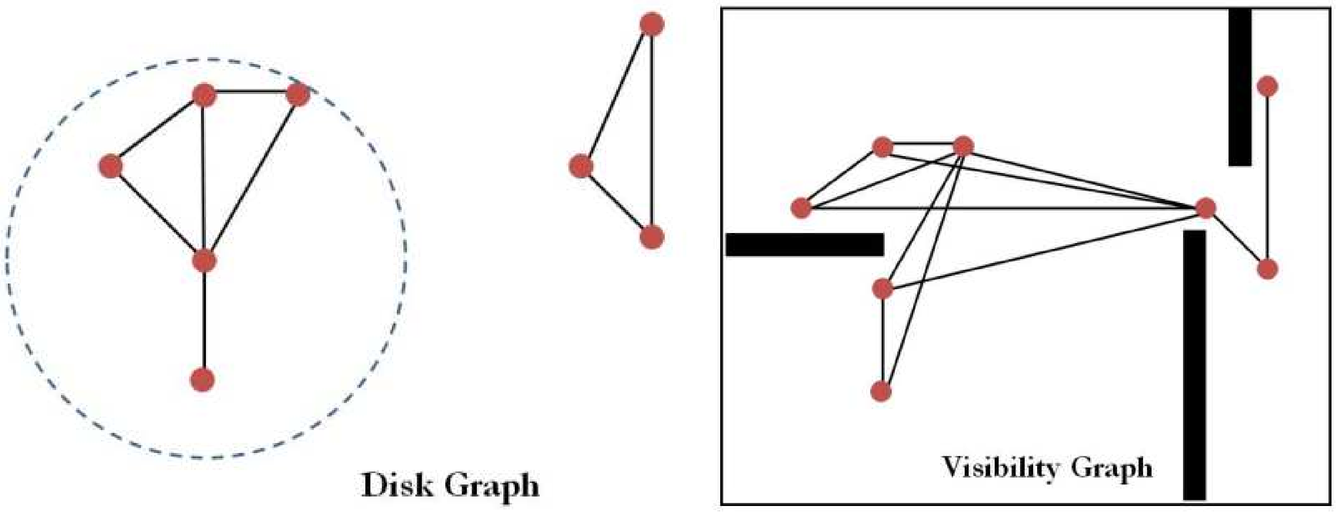


Figura 3: Esempio di grafo non connesso (sinistra) e di grafo connesso (destra)

Sotto-grafi

Definizione 6. *Dato* $G = (V, E)$, $V' \subset V$ *e* $E' \subset E$ *il grafo* $G' = (V', E')$ *è un* **sotto-grafo** *(spanning graph) di* G.

Definizione 7. *Dato* $G = (V, E)$ *e* $S \subset V$ *il* **grafo** *indotto da* S *è* $G_S = (S, E_S)$ *dove* $E_S = \{(v_i, v_j) \in E | v_i, v_j \in S\}$

Esempio 2. *Si consideri* $G = (V, E)$ *con* $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e*
$E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$, *sia* $S = \{2, 3, 4\}$

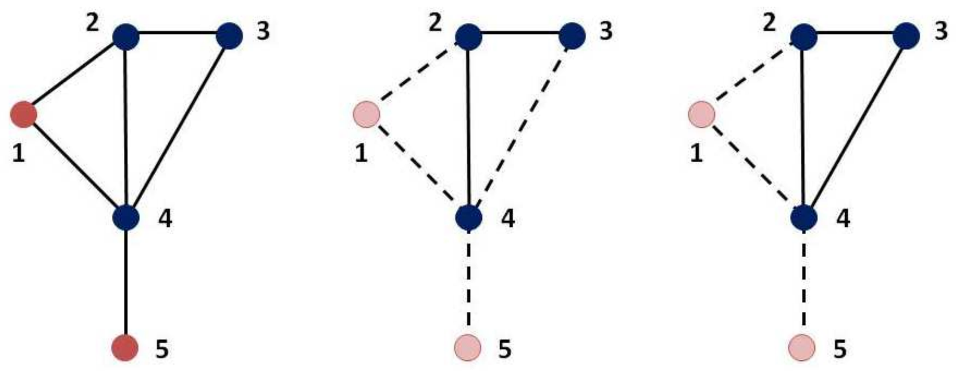


Figura 4: Esempio di sotto-grafo (centro) e sotto-grafo indotto da $S = \{2, 3, 4\}$ *(destra)*

Definizione 8. *Dato un grafo $G = (V, E)$ connesso, un* **albero** *ricoprente è un sottografo connesso di G che ha tutti i nodi in V, alcuni archi di E e non contiene cicli*

L'albero ricoprente è meglio noto con il termine inglese Spanning tree (ST).

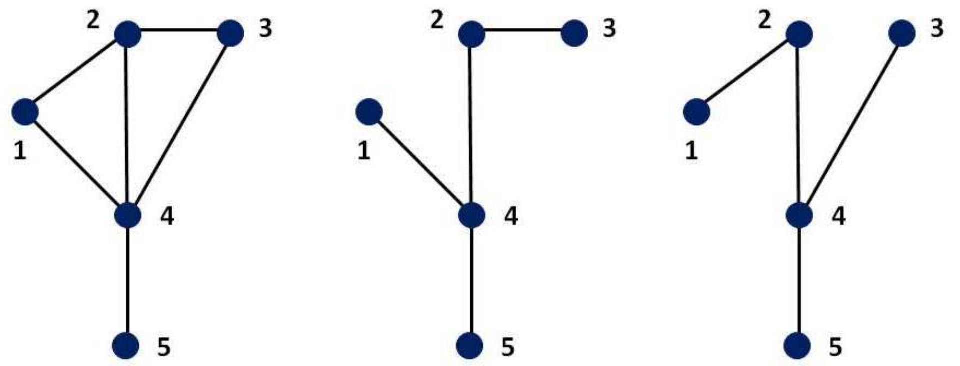


Figura 5: Esempi di alberi ricoprenti

Grafi pesati

Definizione 9. *Dati V ed E, sia $w : E \to \mathbb{R}$ una funzione che associa un valore (o costo) ad ogni arco. Il grafo $G = (V, E, w)$ è un* **grafo** *pesato.*

Un grafo non pesato è un grafo pesato con valore sugli archi pari ad 1.

Sia $\Pi(v_{i_0}, v_{i_n})$ l'insieme dei cammini da v_{i_0} a v_{i_n} sia
$p = (v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) \in \Pi(v_{i_0}, v_{i_n})$. La lunghezza di p è data da
$l(p) = \sum_{j=0}^{n-1} w(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$.

Il cammino minimo (o geodesica) tra due nodi v_{i_0} a v_{i_n} è il cammino a lunghezza minore: $\min_{p \in \Pi(v_{i_0}, v_{i_n})} l(p)$.

Il **diametro** di un grafo connesso è la lunghezza della geodesica più lunga.

Grafi orientati

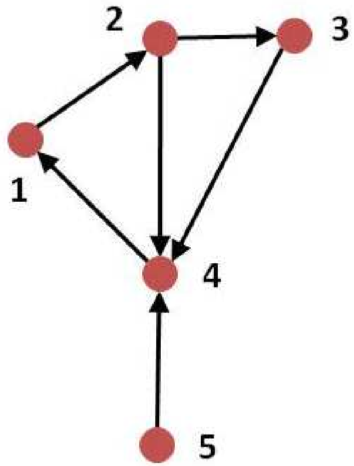
Definizione 10. *Un grafo $G = (V, E)$ è un grafo* **orientato** *(grafo diretto o digrafo) se E è formato da coppie ordinate di nodi. L'arco (v_i, v_j) è un arco da v_i a v_j, si definisce v_j come la* **testa** *dell'arco e v_i come la* **coda** *dell'arco.*

Dato un grafo orientato $G = (V, E)$ la **stella** entrante del nodo v_i è l'insieme $\{v_j \in V | (v_j, v_i) \in E\}$, la **stella** uscente dal nodo v_i è l'insieme $\{v_j \in V | (v_i, v_j) \in E\}$.

Definizione 11. *Un* **cammino** *orientato è una sequenza di nodi del grafo tale che ogni nodo appartiene alla stella entrante del nodo successivo e/o alla stella uscente del nodo precedente.*

Definizione 12. *Un grafo orientato è* **fortemente** *connesso se per ogni coppia di nodi esiste un cammino orientato che li connette.*

Esempio 3. *Si consideri* $G = (V, E)$ *con* $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e*
$E = \{(1, 2), (4, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (5, 4)\}$.

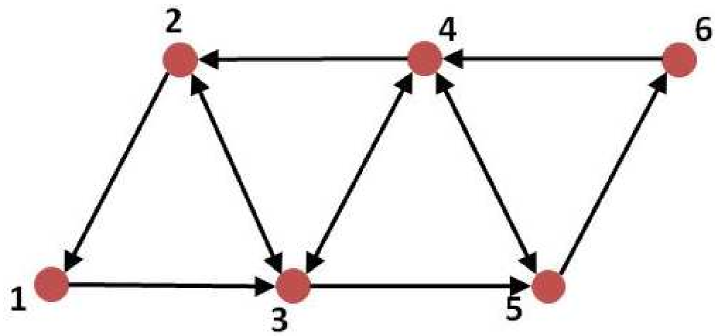


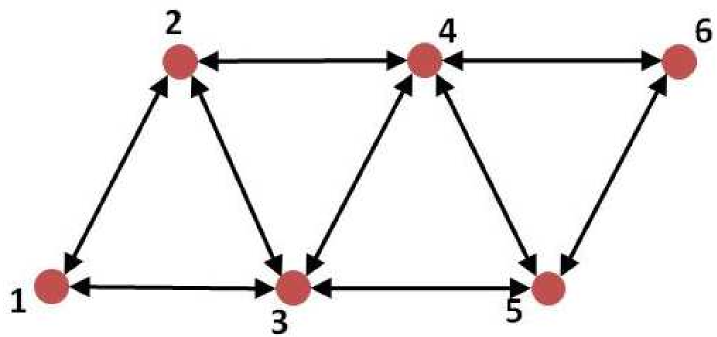
Il nodo 5 *ammette un cammino orientato verso tutti gli altri nodi della rete ma da nessun nodo esiste un cammino orientato verso* 5.

Grafi bilanciati

Definizione 13. *Un nodo v_i di un grafo $G = (V, E)$ orientato è un* **nodo** *bilanciato se e soltanto se la stella uscente e la stella entrante hanno stessa cardinalità. Un grafo orientato è un* **grafo** *bilanciato se tutti i nodi sono bilanciati.*

Ogni grafo non orientato è bilanciato.



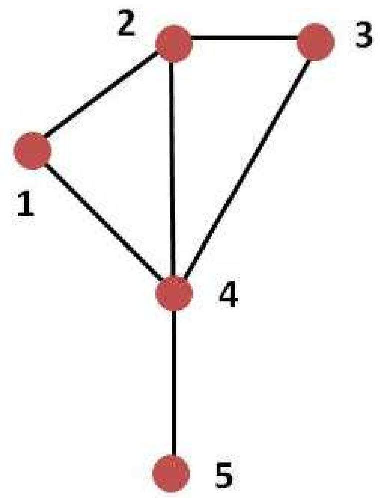


Matrici associate ai grafi

Matrici di Adiacenza

Definizione 14. *Per un grafo non orientato il* **grado** $d(v_i)$ *di un nodo* v_i *è la cardinalità dell'insieme* N_i*. In altre parole è il numero di nodi adiacenti al nodo* v_i*.*

Esempio 4. *Si consideri il grafo* $G = (V, E)$ *dell'esempio 1 con* $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$



Si ha $d(1) = 2$, $d(2) = 3$, $d(3) = 2$, $d(4) = 4$, $d(5) = 1$.

Definizione 15. *La* **matrice** *dei gradi di un grafo G è una matrice diagonale semi-definita positiva di dimensione $n \times n$ con n numero di nodi del grafo, in cui l'i-esimo elemento diagonale è pari al grado $d(v_i)$ del nodo i-esimo:*

$$\Delta(G) = \begin{pmatrix} d(v_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d(v_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d(v_n) \end{pmatrix} \tag{1}$$

In relazione all'esempio 4 $n = 5$

$$\Delta(G) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 16. *La* **matrice** *di Adiacenza di un grafo G è una matrice simmetrica A di dimensione $n \times n$, in cui si rappresentano le relazioni di adiacenza nella rete:*

$$[A(G)]_{i,j} = a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{se } (v_i,\, v_j) \in E \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{2}$$

In relazione all'esempio 4

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrici di Incidenza

Definizione 17. *La* **matrice** *di Incidenza di un grafo orientato G è una matrice D di dimensione $n \times m$, dove m è il numero di archi del grafo, in cui si rappresentano le orientazioni degli archi nella rete:*

$$[D(G)]_{i,j} = d_{i,j} = \begin{cases} -1 & \textit{se } v_i \textit{ è la coda dell'arco } e_j \\ 1 & \textit{se } v_i \textit{ è la testa dell'arco } e_j \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{3}$$

In relazione all'esempio 3, si consideri $E = \{e_1 = (1, 2),\ e_2 = (4, 1),\ e_3 = (2, 3),\ e_4 = (2, 4),\ e_5 = (3, 4),\ e_6 = (5, 4)\}$, da cui $m = 6$ e

$$D(G) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si noti che le matrici di incidenza hanno somma nulla per colonne. Infatti ogni arco ha una testa e una coda.

Laplaciano di un grafo non orientato

Definizione 18. *Il* **Laplaciano** *di un grafo non orientato G*

$$L(G) = \Delta(G) - A(G) \tag{4}$$

dove Δ e A sono, rispettivamente, le matrici dei gradi e di adiacenza di G.

Si noti che la somma per righe del Laplaciano è nulla.

In relazione all'esempio 4

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dando un orientamento arbitrario agli archi nel caso di grafo non orientato si ha che

$$L(G) = D(G)D(G)^T \tag{5}$$

Si noti che il Laplaciano di un grafo non orientato è una matrice simmetrica e semi-definita positiva quindi ha autovalori reali:

$$\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \cdots \leq \lambda_n(G)$$

Visto che la somma per righe del Laplaciano è nulla si ha $\lambda_1(G) = 0$ per ogni grafo.

Che tipo di informazione ci possono dare gli altri autovalori del Lapalaciano?

Analisi spettrale di grafi non orientati

Il primo autovalore del Laplaciano è l'autovalore nullo associato all'autovettore con tutte le componenti pari a 1, denotato con $\mathbf{1}$.

Teorema 1. Primo teorema di Gershgorin
Data $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gli autovalori sono tutti contenuti nell'unione dei cerchi di Gershgorin di centro a_{ii} e raggio $r_i = \sum_{j=1 j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.

Applicando il primo teorema di Gershgorin alla matrice del Laplaciano di un grafo non orientato si ha che gli autovalori (che sono reali) si trovano nell'unione dei cerchi di centro $d(v_i)$ e raggio $d(v_i)$. Quindi considerando $d_{max}(G)$ il grado massimo dei nodi della rete si ha

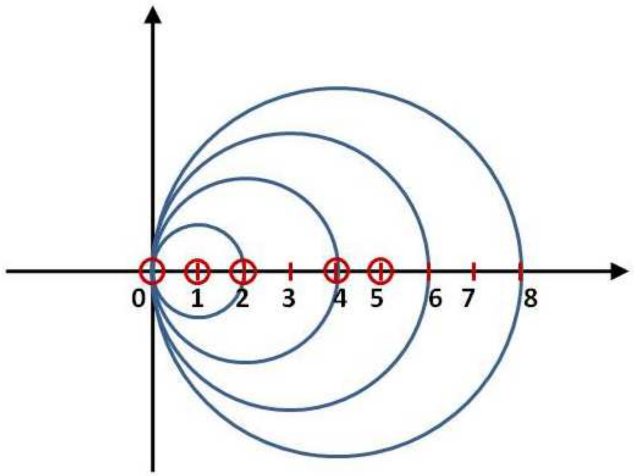
$$\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \cdots \leq \lambda_n(G) \leq 2d_{max}(G)$$

Esempio 5. *In relazione all'esempio 4*

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e il Laplaciano ha autovalori

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 4 \leq 5 \leq 2d_{max} = 8.$$



Sia $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ lo stato del grafo G. Si può definire il **potenziale del Laplaciano:**

$$\Psi_G(x) = \frac{1}{2} x^t L(G) x. \tag{6}$$

Lemma 1. *Dato un grafo $G = (V, E)$ non orientato, il Laplaciano (e il suo potenziale) è semi-definito positivo e soddisfa la seguente proprietà*

$$x^T L(G) x = \sum_{(i,\, j) \in E} (x_i - x_j)^2. \tag{7}$$

Inoltre il potenziale di un grafo connesso si annulla se e soltanto se $x_i = x_j$, $\forall i,\, j$.

Dimostrazione. Dall'equazione 5 si ha che $x^T L(G) x = x^T D(G) D(G)^T x = \|D(G)^T x\|^2 = \sum_{(i,\, j) \in E} (x_i - x_j)^2$ e quindi il Laplaciano e il potenziale del Laplaciano sono semi-definiti positivi.

Se $\sum_{(i,\, j) \in E} (x_i - x_j)^2 = 0$ allora per ogni $(i,\, j) \in E$ si ha $x_i = x_j$. Se il grafo è connesso questo vale per tutte le coppie di nodi (che sono sempre connesse da un cammino) e quindi $x_i = x_j$, $\forall i,\, j$. Il viceversa è ovvio. $\square$

Siamo in grado ora di dimostrare il risultato più importante sul Laplaciano che lega la connettività del grafo agli autovalori del Laplaciano.

Teorema 2. *Un grafo G non orientato è connesso se e soltanto se* $\lambda_2(G) > 0$

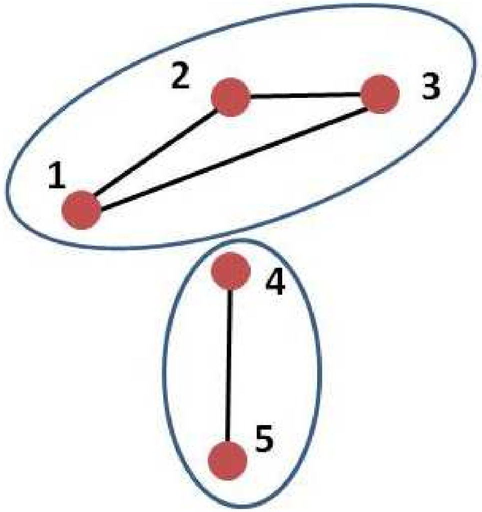
Dimostrazione: Si supponga che il grafo sia connesso ma che $\lambda_2(G) = 0$. In tal caso esiste un autovettore $v_2 \notin < (1) >$ associato all'autovalore nullo. Quindi $L(G)v_2 = 0$ da cui $v_2^T L(G)v_2 = 0$. Essendo il grafo connesso, per il Lemma dimostrato in precedenza si ha che questo equivale a dire che $v_2 \in < (1) >$ ottenendo un assurdo. Pertanto se il grafo è connesso $\lambda_2(G) > 0$.

Si consideri ora $\lambda_2(G) > 0$ e un grafo non connesso, si applichi quanto detto sopra ad una componente connessa del grafo. Si consideri un cambio di base del Laplaciano che riporti i nodi della componente connessa ai primi posti del Laplaciano. Si consideri il vettore w associato all'autovalore nullo per la componente connessa e lo si completi fino ad ottenere un vettore in $\mathbb{R}^n$ con tutti numeri zero. Si é costruito in questo modo un vettore che non ha tutte componenti uguali ma che annulla il Laplaciano (cambiato di base). Si ottiene cosí un assurdo nell'aver supposto che il grafo non fosse connesso.

L'autovalore λ_2 è quindi una sorta di misura di connettività del grafo, l'autovalore è noto col nome di **Valore** di Fiedler.

Corollario 1. *Dato un grafo* G *non orientato la molteplicità algebrica dell'autovalore* 0 *è pari al numero di componenti connesse di* G.

Esempio 6. *Si consideri il grafo* $G = (V, E)$ *con* $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (5, 4)\}$



$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 *autovalori nulli associati agli autovettori*

$$\mathbf{1} \ e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ o \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

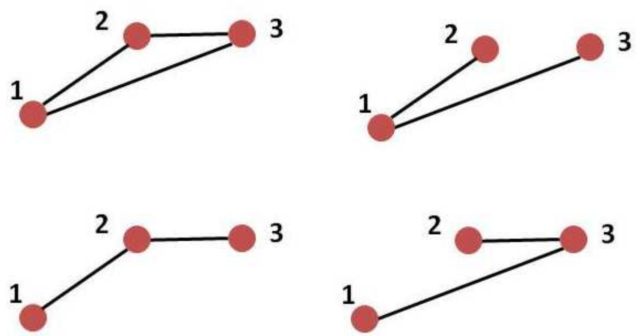
Teorema 3. Teorema di Kirchhoff
Dato un grafo connesso G con n vertici. Il numero di alberi ricoprenti di G è

$$t(G) = \frac{1}{n}\lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n\,.$$

dove λ_2, λ_3, $\ldots$, λ_n sono gli autovalori non nulli del laplaciano.

In altri termini, il numero di alberi ricoprenti è uguale a qualsiasi cofattore della matrice laplaciana di G (determinante della matrice G tolta una qualsiasi riga e corrispondente colonna).

Esempio 7. *Si consideri il grafo in figura*



$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 3$$

$$t(G) = 3$$

$$L_{[i,i]}(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio su Grafo completo

Un grafo completo K_n è un grafo in cui ogni coppia di nodi è connessa da un arco, $E = \{(u, v) | u, v \in V, \;\; u \neq v\}$, con n si indica il numero di nodi del grafo. Si ha:

$$L(K_n) = -\mathbf{1}\mathbf{1}^T + nI_n$$

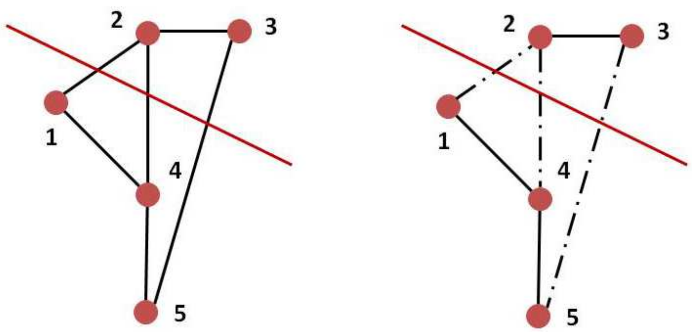
dove I_n è la matrice identica di dimensione n. Infatti, ogni nodo ha grado $n-1$ ed è connesso a tutti gli altri $n-1$ nodi. La matrice con tutti 1 è una matrice di rango 1 pertanto ha $n-1$ autovalori nulli, ha traccia n quindi l'altro autovalore vale n (si ricorda che il determinante di una matrice è il prodotto degli autovalori mentre la traccia ne è la somma). Si ricorda che autovalori di $A + \lambda I$ sono gli autovalori di A traslati di λ. Quindi il laplaciano di un grafo completo ha autovalori $\{0, n, n, \ldots, n\}$.

Taglio di un grafo e connettività

Definizione 19. *Un* **taglio** *di un grafo è una partizione dell'insieme dei vertici* V *in due sottoinsiemi* S *e* T, $S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$. *L'***insieme** *di taglio è il corrispondente insieme di archi i cui vertici sono in diversi sottoinsiemi della partizione,* $E_{S,T} = \{(u, v) \in E | u \in S, v \in T\}$. *Tali archi si dicono* **attraversare** *il taglio.*

Definizione 20. *In un grafo non orientato (e non pesato) la* **dimensione** *del taglio* $d(S, T)$ *è il numero di archi nell'insieme di taglio. In un grafo pesato, la dimensione è data dalla somma dei pesi degli archi nell'insieme di taglio.*

Esempio 8. *Si consideri il grafo in figura*



$$S = \{1,\ 4,\ 5\},\ T = \{2,\ 3\}$$
$$E_{S,T} = \{(1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 5)\}$$
La dimensione del taglio è
$$d(S,T) = 3.$$

Come tagliare un grafo? Minimizzando il numero di archi che attraversano il grafo? Cercando di dividere i nodi del grafo in due sottoinsiemi con la stessa quantità di nodi?

Un utile compromesso è dato dal rapporto di taglio. Data la partizione S e $T = V \setminus S$ di V sia

$$\phi(S) = \frac{d(S, T)}{min\{|S|, |T|\}}$$

dove $|A|$ è la cardinalità dell'insieme A.

Il **numero** isoperimetrico di un grafo è il minimo valore del rapporto di taglio $\phi(G) = \min_{S \subset V} \phi(S)$

La diseguaglianza di Cheeger fornisce dei limiti al valore di $\lambda_2(G)$:

$$\frac{\phi(G)^2}{2d_{max}(G)} \leq \lambda_2(G) \leq \phi(G) \tag{8}$$

dove $d_{max}(G)$ è il massimo grado dei nodi del grafo.

Dall'esempio 8 si ha $\phi(G) = \frac{3}{2}$, $d_{max}(G) = 3$ da cui $0.375 \leq \lambda_2(G) \leq 1.5$ ed effettivamente $\lambda_2(G) = 1.381$.

In seguito vedremo come il valore $\lambda_2(G)$ non è solo indicativo della connettività della rete (robustezza del sistema multi agente) ma gioca anche un ruolo importante per la convergenza di algoritmi distribuiti.

Analisi spettrale di grafi orientati e pesati

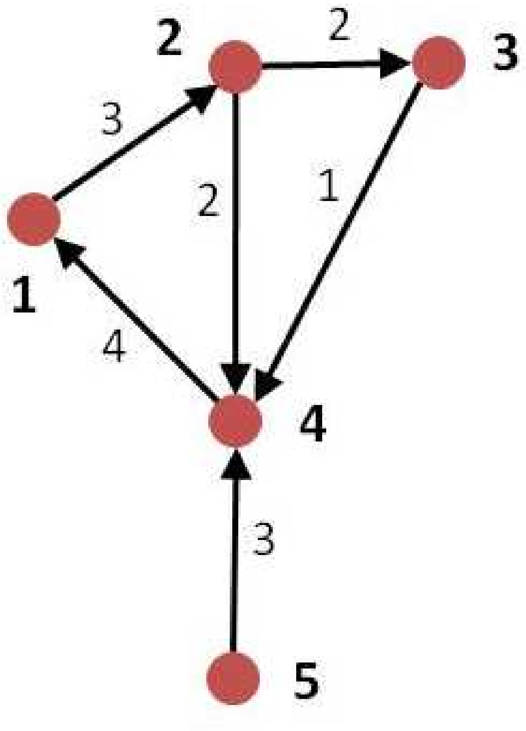
Sia $G = (V, E, w)$ un grafo orientato e pesato con peso dell'arco $(v_i, v_j) \in E$ pari a w_{ij}. Sia A la matrice di adiacenza pesata dove al posto dell'elemento 1 corrispondente all'arco $(v_i, v_j) \in E$ (ora sequenza e non coppia di nodi) appare il valore w_{ij} del peso dell'arco.

Il grado degli archi in ingresso al nodo i è dato da $deg_{in}(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$, mentre il grado degli archi in uscita dal nodo i è dato da $deg_{out}(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

La matrice dei gradi Δ di un grafo orientato e pesato è la matrice diagonale con elementi $deg_{out}(v_i)$ sulla diagonale.

Il Laplaciano è definito $L = \Delta - A$ e la definizione è consistente con quella data per i grafi non orientati considerando tutti i pesi uguali a 1.

Esempio 9. *Si consideri il grafo in figura*



$$L(G) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

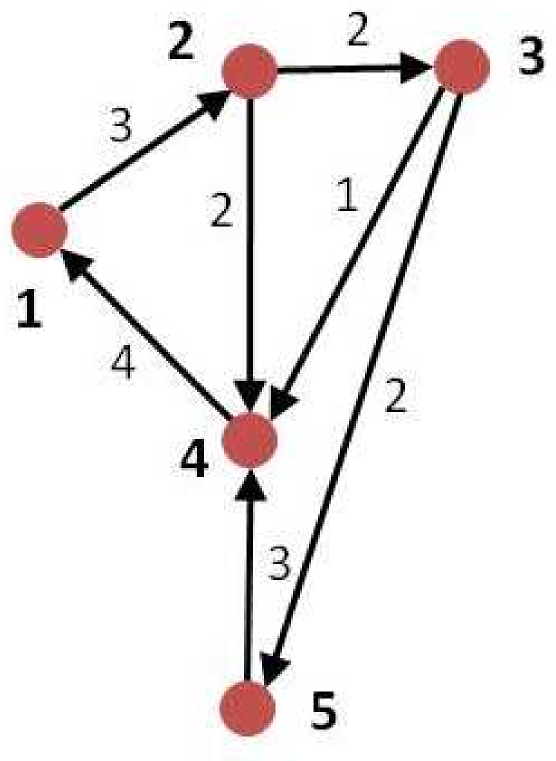
Nel caso di grafi orientati la matrice del Laplaciano non è necessariamente simmetrica, quindi non è detto che sia semi-definita positiva come nel caso di grafi non orientati.

Anche nel caso di grafi orientati la somma per righe del Laplaciano è nulla quindi il Laplaciano ha un autovalore nullo. Il vettore $w_r = \mathbf{1}$ è l'autovettore destro associato all'autovalore nullo, i.e. $Lw_r = 0$.

Teorema 4. *Sia $G = (V, E, w)$ un grafo orientato e pesato con Laplaciano L. Se G è fortemente connesso il rango del Laplaciano è $n-1$, i.e. $rank(L) = n-1$.*

Si osservi che a differenza dei grafi non orientati il viceversa non è vero, cioè esistono grafi orientati il cui Laplaciano ha rango $n-1$ che però non sono fortemente connessi (ad esempio nell'esempio 9 in cui L ha rango $n-1$ oppure un grafo con due nodi e un solo arco tra i due).

Esempio 10. *Si consideri il grafo in figura*

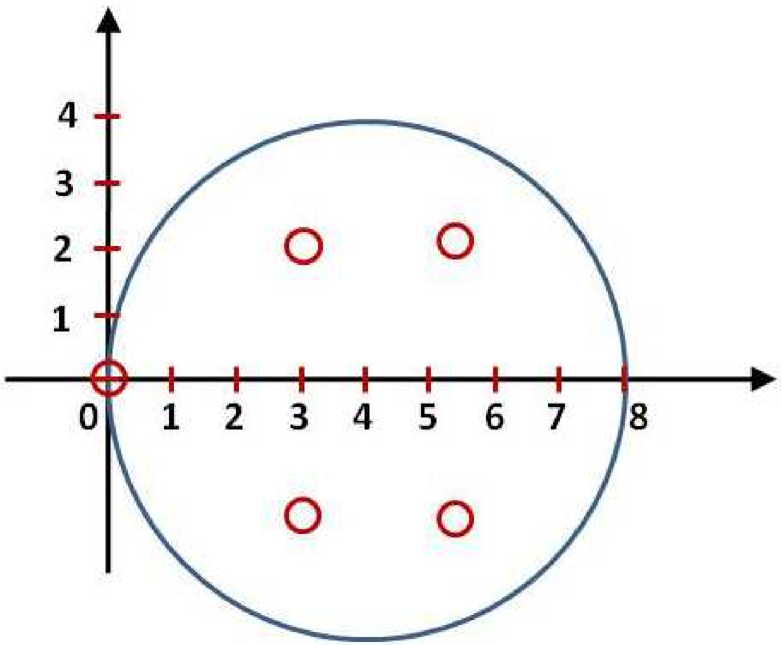


$$L(G) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ha rango 4.

Teorema 5. *Sia $G = (V, E, w)$ un grafo orientato e pesato con Laplaciano L. Sia $d_{max}(G) = \max_i deg_{out}(v_i)$. Tutti gli autovalori di L appartengono al disco nel piano complesso centrato $(d_{max}(G), 0)$ e raggio $d_{max}(G)$, cioè in $D(G) = \{z \in \mathbb{C} | |z - d_{max}(G)| \leq d_{max}(G)\}$*

Per il grafo dell'esempio 10 si ha:



Modelli di rete

Data la scelta dei grafi come modelli per i sistemi di agenti o robot è necessario specificare che tipo di grafi utilizzare a seconda del problema che si intende risolvere.

Ad esempio se si ha un sistema di agenti fissi che scambiano informazioni attraverso una rete statica, il grafo rappresenta la rete di comunicazione, gli archi sono i canali di comunicazione e pertanto E è fissato e non cambia.

Nel caso invece di sistemi di robot mobili la rete di comunicazione tra i robot è tipicamente tempo variante e dipende dalla posizione relativa tra i robot. Si ha quindi un insieme di archi $E(t)$. Ad esempio nel caso di comunicazione basata sulla distanza tra i robot si ha che due robot comunicano solo se a distanza minore di un valore prefissato D. Quindi dati v_i e $v_j \in V$, $(v_i, v_j) \in E(t)$ se e soltanto se $\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq D$ dove $x_i(t)$ e $x_j(t)$ sono le posizioni nel piano dei robot i e j rispettivamente.