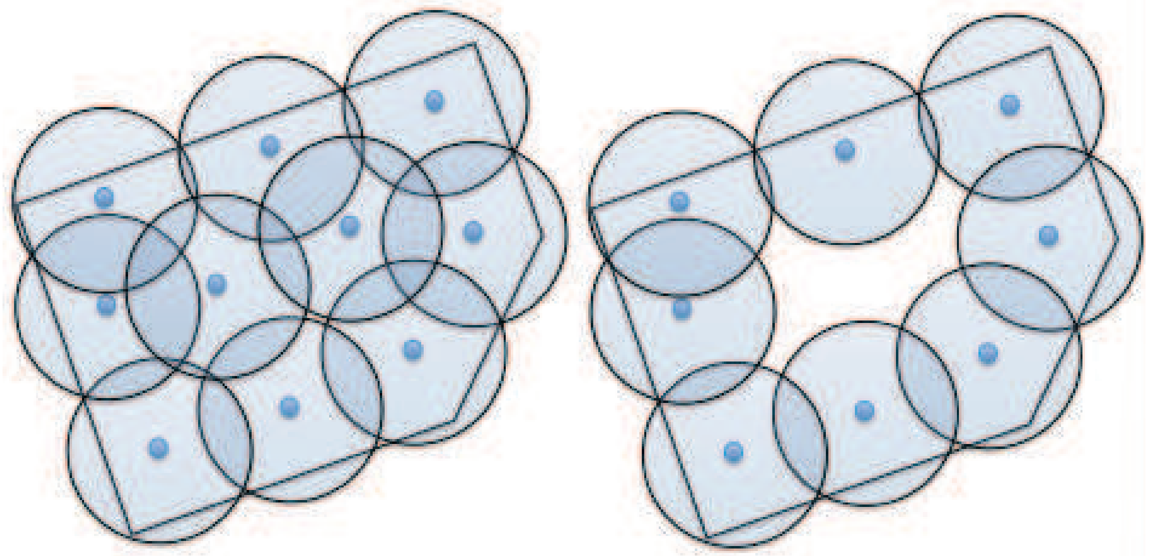
Coverage

Si consideri ora il problema di coordinare una squadra di robot con dei sensori omnidirezionali in modo da garantire che ogni punto dello spazio sia coperto dall'area dei sensori (noto come problema di coverage). In questo caso non è possibile ignorare la geometria del problema. Infatti il coverage dipende fortemente sia dalla geometria dell'area dei sensori, sia dalla geometria dell'ambiente che si vuole monitorare. È comunque possibile utilizzare un approccio basato su grafo per approcciare il problema.

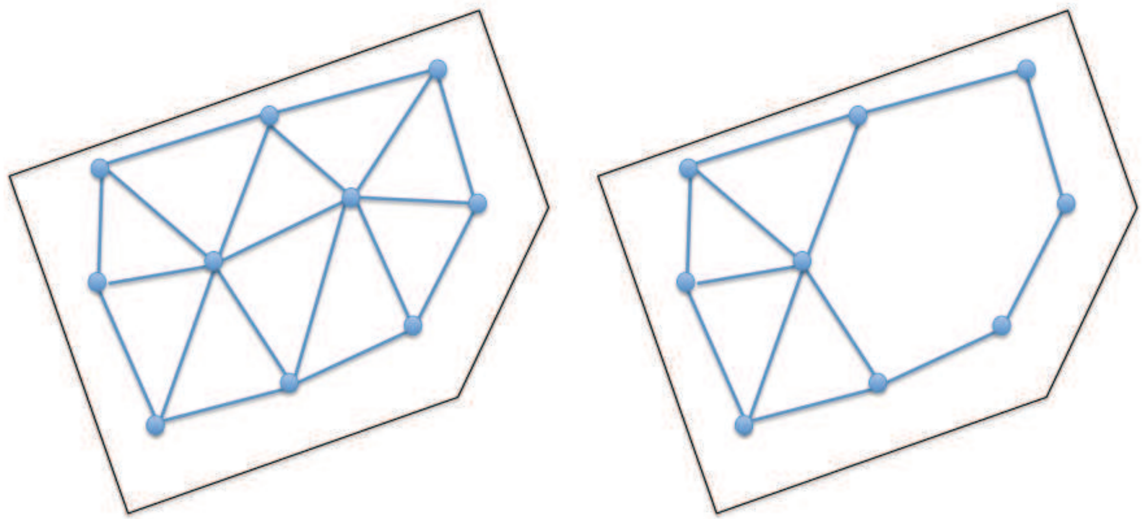


Visto che il coverage si basa su aree dell'ambiente che vengono monitorate non è sufficiente studiare vertici e archi di un grafo appositamente definito per gestire il problema del coverage. Invece, è necessario capire come le aree sono limitate da archi tramite la nozione di triangolazione già introdotta nei problemi di pianificazione del moto del singolo agente.

Si definisce sottografo triangolare un sottografo completo composto da tre vertici. Si noti che è necessario associare al grafo una posizione nell'ambiente da monitorare (procedimento noto come planar embedding). Un grafo G è planare se esiste una funzione $\zeta : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale per cui, se gli archi sono segmenti nel piano, gli archi si intersecano solo sui vertici.

Un grafo embedded (G, ζ) è un grafo piano se G è planare attraverso la funzione ζ. Le regioni delimitate dagli archi di un grafo piano sono dette facce e ogni grafo planare finito ha una sola faccia non limitata denotata con faccia esterna.

Un grafo piano è una triangolazione planare perfetta se la faccia esterna è un ciclo e tutte le facce interne sono triangoli.



Nel contesto del coverage la funzione ζ definisce la posizione $\zeta(v_i)$ del sensore v_i. Gli archi sono geometricamente indotti dal range dei sensori (grafi di prossimità). Diciamo che un grafo di prossimità embedded (G, ζ) risolve il problema del coverage se è una triangolazione planare perfetta.

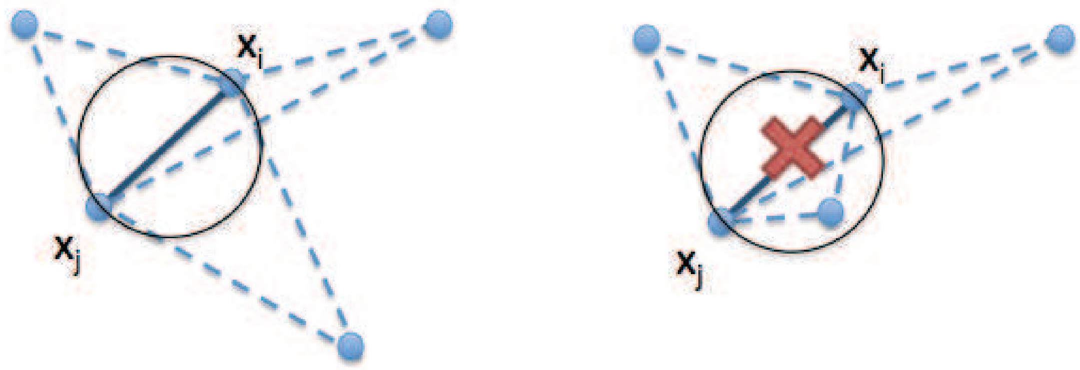
Questa è la formulazione di un problema di coverage combinatorico e non corrisponde esattamente al coverage geometrico. D'altronde tale formulazione consente di gestire il problema utililzzando metodi basati su grafo.

La scelta di un disc-graph (o grafo di prossimità) non sembra essere la più adeguata per la gestione di un problema globale come quello del coverage. Si preferisce quindi utilizzare grafi con interazioni a maggior distanza come i grafi di Gabriel e di Voronoi.

Coverage con grafi di Gabriel

L'idea principale è quella di utilizzare grafi di prossimità in cui però sono presenti anche archi che rappresentano interazioni tra agenti a distanza maggiore del range dei sensori.

Si considerino n vertici v_i posizionati in $x_i \in \mathbb{R}^2$. Il grafo di Gabriel associato è $G = (V, E)$ con $V = \{v_i |\, i = 1, \ldots, n\}$ e $(v_i, v_j) \in E$ se e soltanto se l'angolo interno $\angle(x_i, x_k, x_j)$ è acuto per tutti i punti x_k. Equivalentemente $(v_i, v_j) \in E$ se e soltanto se il cerchio di diametro $\|x_i - x_j\|$ passante per x_i e x_j non contiene altri nodi al suo interno.



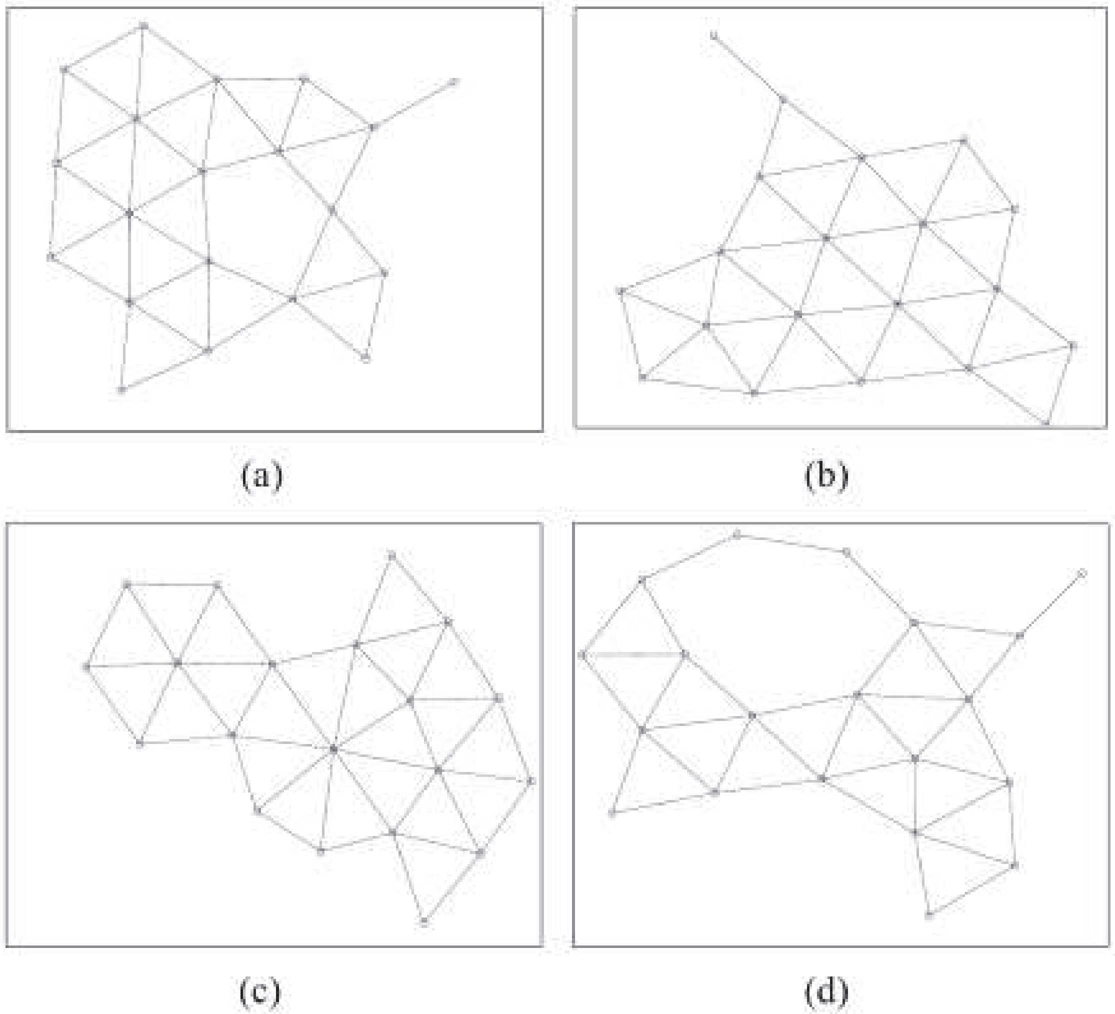
Proprietà grafi di Gabriel

- L'arco tra gli agenti più vicini appartiene al grafo di Gabriel. In altre parole, se $\|x_i - x_j\| < \|x_i - x_k\|$ per tutti i $k \neq i, j$, allora $(v_i,\, v_j) \in E$.
- Se $(v_i,\, v_j) \notin E$ allora esiste v_k tale per cui x_k è più vicino sia ad x_i che a x_j di quanto non lo fossero x_i e x_j. In altre parole, $\|x_i - x_k\| < \|x_i - x_j\|$ e $\|x_j - x_k\| < \|x_i - x_k\|$.
- Ogni grafo di Gabriel è planare e quindi un buon candidato per il problema di coverage. Infatti se due archi tra due coppie di nodi si incrociassero si avrebbe un quadrilatero con almeno un angolo ottuso e pertanto l'arco associato non potrebbe essere nel grafo.
- Ogni grafo di Gabriel è connesso. Si dimostra per assurdo considerando i nodi più vicini di due sottoinsiemi qualsiasi di nodi e mostrando che se l'arco tra questi nodi non appartiene al grafo si ha un assurdo.

Si noti però che non necessariamente i grafi di Gabriel sono delle triangolazioni planari perfette. Per risolvere questo problema si fanno muovere gli agenti in modo da ottenere una triangolazione planare perfetta. A questo scopo si utilizza un potenziale che muova gli agenti ad una distanza di interazione desiderata Δ.

Si consideri $U_{ij} = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| - \Delta)^2$ per tutti gli archi $(v_i, v_j) \in E$.

Si consideri il controllo $u_i = -\sum_{j \in N(i)} \nabla_{x_i} U_{ij} = -\sum_{j \in N(i)} \frac{\|x_i(t) - x_j(t)\| - \Delta}{\|x_i(t) - x_j(t)\|}(x_i(t) - x_j(t))$. Se gli agenti hanno una dinamica a singolo integratore questa legge porta gli agenti ad avere una struttura che si avvicina ad una triangolazione planare perfetta.


(a)
(b)
(c)
(d)

Coverage con grafi di Voronoi

Il risultato ottenuto con la legge di controllo descritta è dovuto all'aver considerato alcuni archi di lunghezza maggiore. Le lunghezze si basavano sulle distanze tra i nodi. Un'alternativa è quella di utilizzare l'area ricoperta dai sensori da cui segue una formulazione del problema basata sulle partizioni di Voronoi.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'area da ricoprire, supposta chiusa, connessa e compatta. Una tassellazione $W = \{W_i\}$ di Ω è un insieme W di insiemi W_i per i quali $\cup_{i=1}^n W_i = \Omega$ e $W_i \cap W_j = \emptyset$, per ogni $i \neq j = 1, \ldots, n$.

W_i è la regione di cui è responsabile l'agente i, detta anche regione di dominanza di i. Dato $x = (x_1^T, \ldots, x_n^T)$ si può definire una funzione costo (posizionale)

$$H(x, W) = \sum_{i=1}^{n} \int_{W_i} \|q - x_i\|^2 dq.$$

la funzione rappresenta quanto bene gli insiemi W_i sono ricoperti dagli agenti dove la qualità del coverage degrada quadraticamente con $\|q - x_i\|$.

Il problema di minimizzare $H(x, W)$ si semplifica se si assume che W è la partizione di Voronoi di Ω generata da x: $W_i = \mathcal{V}_i(x)$ dove

$\mathcal{V}_i(x) = \{q \in \Omega | \|q - x_i\| \leq \|q - x_j\| \forall j \neq i\}$.

Con questa ipotesi il problema diventa quello di minimizzare rispetto ad x:

$$H_{\mathcal{V}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{V}_i} \|q - x_i\|^2 dq.$$

L'idea è quella di muovere gli agenti lungo la direzione di decrescita secondo il metodo del gradiente. In altre parole

$$\dot{x}_i(t) = -\frac{\partial H_{\mathcal{V}}(x)}{\partial x_i} = -2 \int_{\mathcal{V}_i} (x_i(t) - q) dq.$$

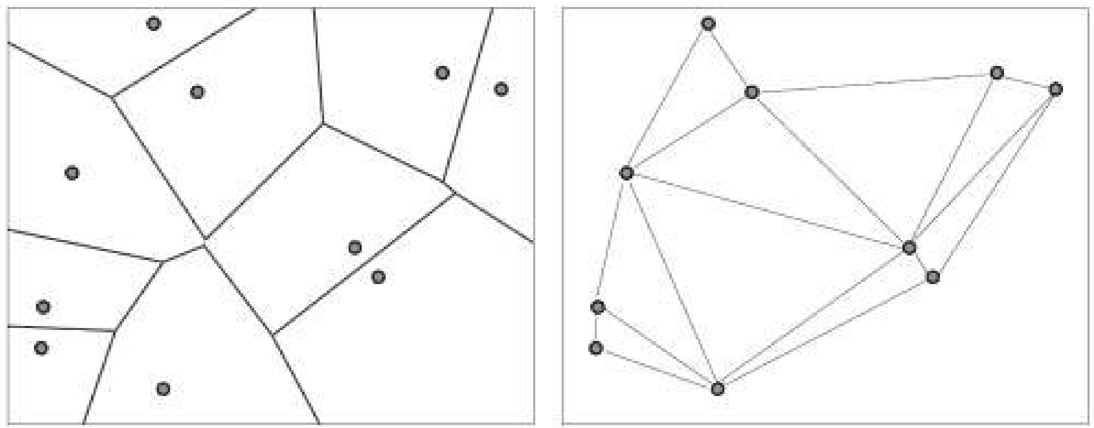
Utilizzando pesi tempo-varianti:

$$\dot{x}_i(t) = -\frac{1}{2 \int_{\mathcal{V}_i} dq} \frac{\partial H_{\mathcal{V}}(x)}{\partial x_i}$$

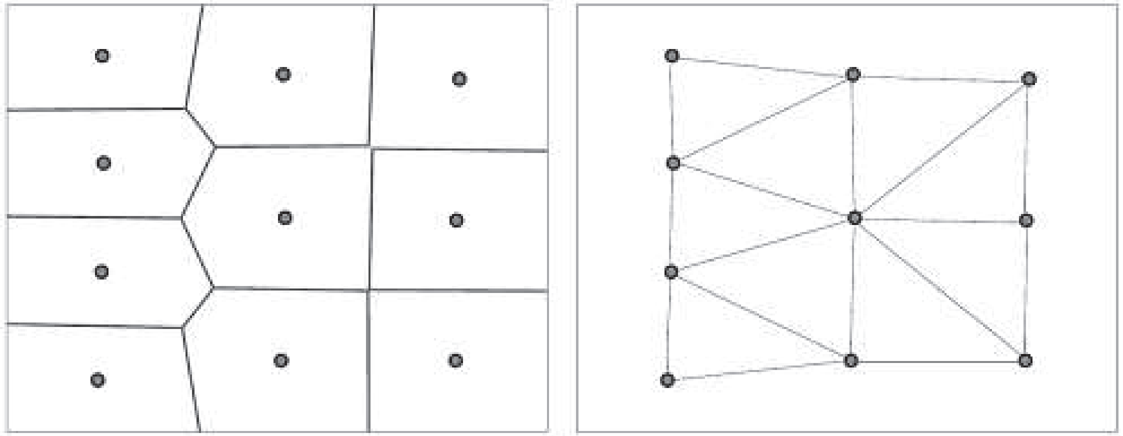
si ottiene $\dot{x}_i(t) = \rho_i(x(t)) - x_i(t)$ dove $\rho_i(x(t))$ è il centro di massa della cella di Voronoi i al tempo t.

Si noti che le regioni $\mathcal{V}_i$ devono essere calcolare quindi ogni agente deve essere in grado di effettuare dei conti basati sulla geometria. Inoltre ogni agente deve conoscere la posizione degli agenti associati alle regioni di Voronoi adiacenti a $\mathcal{V}_i$ (qui servono le interazioni a lunga distanza).

Nelle figure sono riportati gli agenti nelle posizioni iniziali e finali secondo la legge dinamica determinata. Sono inoltre riportati i grafi che hanno nodi nella posizione degli agenti e archi tra nodi con regioni di Voronoi adiacenti (grafi di Voronoi).



(a) (b)


(a) (b)

Nella configurazione finale gli agenti sono nel centro di massa della cella di Voronoi quindi si dice che con la legge di controllo proposta si raggiunge una tassellazione centrale di Voronoi. Esistono diversi minimi locali della funzione costo che corrispondono a tassellazioni centrali di Voronoi ma che sono tassellazioni differenti.

Anche in questo caso non si garantisce l'ottenimento di una triangolazione.

Nella funzione costo $H(x, W)$ si può scegliere una qualsiasi funzione $f(\|q - x\|)$ che sia non decrescente e differenziabile.